# INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1954

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

*Preis DM 9,40*

Das

# INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.- Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnerstr. 12
Professor **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Walter-von-Dyck-Platz 1
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einsenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 2440 u. 5430

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 249251

**Vertriebsvertretung im Ausland:**
Lange, Maxwell & Springer Ltd. 242 Marylebone Road, London, N. W. 1.

## Inhalt:

Seite

*Wuest, W.*, Strömung durch Schlitz- und Lochblenden bei kleinen *Reynolds*-Zahlen. Mit 10 Textabbildungen ..... 357

*Wieghardt, K.*, Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit kontinuierlicher Absaugung. Mit 6 Textabbildungen ..... 368

*Sänger, E.*, Zur Thermodynamik des Überschall-Geradstoßdiffusors. Mit 14 Textabbildungen ..... 378

*Domm, U.*, Ein Beitrag zur Stabilitätstheorie der Wirbelstraßen unter Berücksichtigung endlicher und zeitlich wachsender Wirbelkerndurchmesser. Mit 7 Textabbildungen ..... 400

*Jindra, F.*, Die Hohlkugel bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz. Mit 6 Textabbildungen ..... 411

INGENIEUR-ARCHIV

XXII. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1954

# Strömung durch Schlitz- und Lochblenden bei kleinen *Reynolds*-Zahlen*.

Von W. Wuest.

**1. Einleitung.** Kleine *Reynolds*sche Zahlen treten außer bei der Strömung in sehr zähen Medien auch bei sehr geringen Gasdichten auf. Bei sehr weitgehender Verdünnung des Gases ist schließlich die freie Weglänge groß gegen den mittleren Wandabstand, d. h. die Strömung hat molekularen Charakter (molekulare Gasströmung). Im Grenzfall unendlich großer freier Weglänge ergeben sich besonders einfache Verhältnisse. Für diesen Grenzfall sind daher verschiedene Strömungsprobleme, darunter auch der Durchfluß durch Lochblenden, schon sehr frühzeitig gelöst worden (*Knudsen* 1909). Bei endlicher freier Weglänge treten Abweichungen infolge von Zweierstößen zwischen den Molekülen auf. Dieses Problem ist neuerdings von *Hiby* und *Pahl* [1] untersucht worden, auch für den Fall der Lochblende. Bei weiterer Steigerung der Gasdichte nimmt schließlich die Strömung molaren Charakter an, d. h. die Gesetze der Kontinuumsphysik sind anwendbar. Die *Reynolds*sche Zahl kann dabei aber immer noch sehr klein sein. Die Strömung durch lange Rohre und Spaltkanäle geht allmählich in die *Poiseuille*strömung über, das entsprechende Gegenstück der Strömung durch Schlitz- und Lochblenden ist dagegen bisher nur wenig untersucht worden. Zu erwähnen ist hier lediglich eine experimentelle Arbeit von *F. C. Johannsen* [2], der die laminare Strömung durch Lochblenden bei sehr kleinen *Reynolds*zahlen untersucht hat. Im folgenden wird der Versuch gemacht, diese Zusammenhänge auch theoretisch klarzustellen. Da das ebene Problem der Schlitzblende leichter beherrscht werden kann als das rotationssymmetrische Problem der Lochblende, beginnen wir die Untersuchung mit dem erstgenannten. Um die Probleme einer Berechnung zugänglich zu machen, werden fernerhin folgende Beschränkungen hinsichtlich der geometrischen Abmessungen und der Strömungsform vorausgesetzt:

1. Spaltweite bzw. Durchmesser der Öffnung klein gegen die Abmessungen des Rohres, in dem sich die Blende befindet.
2. Wandstärke der Blende klein gegen die Öffnung.
3. Strömung inkompressibel. Soweit es sich also um eine Gasströmung handelt, soll die Druckdifferenz vor und hinter der Blende klein gegen den absoluten Druck sein.

**2. Die Schlitzblende; Grenzfall sehr kleiner *Reynolds*zahl.** Der Grenzfall sehr kleiner *Reynolds*zahl ist dadurch gekennzeichnet, daß nur Druck- und Reibungskräfte berücksichtigt werden, während Trägheitskräfte vernachlässigt werden. Die *Navier-Stokes*schen Gleichungen nehmen dann folgende Form an:

$$\operatorname{grad} p = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v}\,, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0\,. \tag{1.1}$$

Für das folgende brauchen wir diese Differentialgleichungen in krummlinigen isometrischen Koordinaten: Wenn wir mit $H(\xi,\eta)$ den örtlich veränderlichen Maßstabsfaktor des ebenen, orthogonalen und isometrischen Koordinatensystems bezeichnen, so gehen mit

$$\omega = \operatorname{rot}\mathfrak{v} = \frac{1}{H^2}\left[\frac{\partial(H u_\xi)}{\partial\eta} - \frac{\partial(H u_\eta)}{\partial\xi}\right] \tag{1.2}$$

die Gleichungen (1.1) über in

$$\frac{\partial p}{\partial\xi} = \mu\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial\eta} = -\mu\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\,, \qquad \frac{\partial(H u_\xi)}{\partial\xi} + \frac{\partial(H u_\eta)}{\partial\eta} = 0\,, \tag{1.3}$$

woraus man ableiten kann

$$\Delta p = 0\,, \qquad \Delta\omega = 0\,. \tag{1.4}$$

* Vorgetragen auf der Gamm-Tagung Aachen 1953.

[1] *J. W. Hiby* u. *M. Pahl*, Z. Naturforschung 7a, (1952) S. 533, 542.

[2] *F. G. Johannsen*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 126, (1930) S. 231.

Für das vorliegende Problem empfiehlt es sich, zu Kegelschnittkoordinaten überzugehen, die aus konfokalen Ellipsen und Hyperbeln bestehen (Abb. 1). Der Zusammenhang zwischen der $(x, y)$-Strömungsebene und den neuen Koordinaten $\xi, \eta$ ist dabei gegeben durch

$$x = c \,\mathfrak{Cof}\, \xi \cos \eta\,, \qquad y = c \,\mathfrak{Sin}\, \xi \sin \eta\,,$$

und der Maßstabsfaktor $H$ ist

$$H = c \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi - \cos 2\,\eta)}\,. \tag{1.5}$$

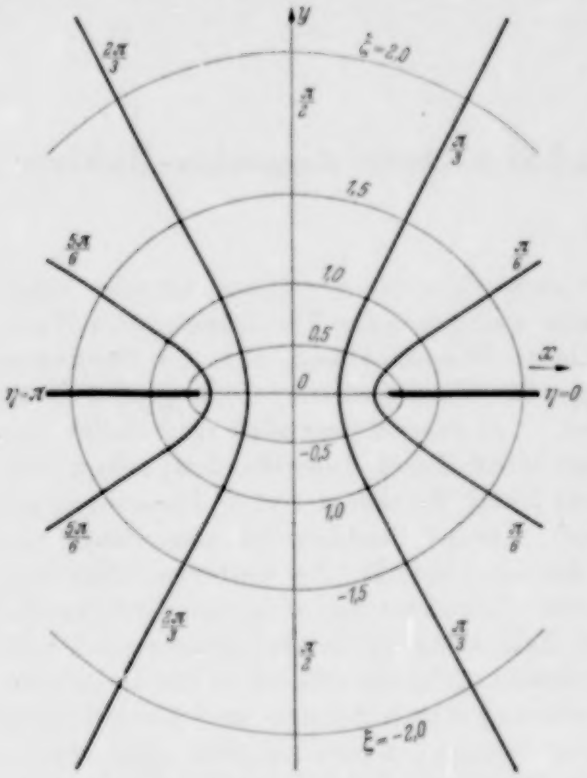


Abb. 1. Kegelschnitt-Koordinaten für die Berechnung der Strömung durch eine Schlitzblende.

Da die Strömungsebene für beliebige Werte $\xi, \eta$ unendlichfach überdeckt wird, müssen wir noch eine Vereinbarung über eine eindeutige Zuordnung machen. Zunächst soll $\eta$ nur Werte zwischen 0 und $\pi$ durchlaufen. Ferner wollen wir annehmen, daß wir beim Durchgang durch den Schlitz in ein anderes *Riemann*sches Blatt der $(x, y)$-Ebene gelangen und zwar so, daß negativen Werten von $y$ negative $\xi$ entsprechen (vgl. Abb. 1). Der Potentialgleichung (4) genügen beliebige Funktionen der komplexen Variablen $\zeta = \xi + i\,\eta$. Es zeigt sich, daß auch die Randbedingungen $u_\xi = u_\eta = 0$ für $\eta = 0$ und $\pi$ erfüllt werden, wenn man folgenden Lösungsansatz macht:

$$p = \mu\, C_1\, \Re\,(\mathfrak{Tg}\, \zeta) = \mu\, C_1 \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\,\xi}{\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi - \cos 2\,\eta}\,. \tag{1.6}$$

Es folgt dann nämlich

$$\omega = -\, C_1 \frac{\sin 2\,\eta}{\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi - \cos 2\,\eta}\,, \tag{1.7}$$

so daß man zusammen mit der Kontinuitätsgleichung folgendes Gleichungssystem für die Geschwindigkeiten erhält:

$$\frac{\partial(H\,u_\xi)}{\partial \eta} - \frac{\partial(H\,u_\eta)}{\partial \eta} = -\, C_1 \frac{c^2}{2} \sin 2\,\eta\,, \qquad \frac{\partial(H\,u_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\delta(H\,u_\eta)}{\delta \eta} = 0\,. \tag{1.8}$$

Die Lösung lautet offenbar unter Beachtung der Randbedingungen

$$u_\eta = 0\,, \qquad u_\xi = \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi - \cos 2\,\eta}}\, \frac{C_1\, c}{4}\,(\cos 2\,\eta - 1)\,. \tag{1.9}$$

Die Konstante $C_1$ kann man noch auf die durchfließende Flüssigkeitsmenge zurückführen:

$$Q = \int_0^\pi u_\xi H\, d\eta = \int_0^\pi \frac{C_1\, c^2}{4}\,(\cos 2\,\eta - 1)\, d\eta\,, \qquad Q = -\,\frac{C_1\, c^2\, \pi}{4}\,. \tag{1.10}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung ist dann

$$u_\xi = \frac{2\,Q}{d\pi} \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi - \cos 2\,\eta}}\; (1 - \cos 2\,\eta)\,, \tag{1.11}$$

mit der Spaltweite $d = 2\,c$.
und der Druckabfall $\Delta p$ ist gegeben durch

$$\Delta p = p_{\xi = \infty} - p_{\xi = -\infty} = 2\,\mu\, C_1 = \frac{32}{\pi}\, \frac{Q}{d^2}\, \mu \tag{1.12}$$

Für großen Abstand $r$ vom Spalt kann man näherungsweise $\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi = 2\,r^2/c^2$ setzen und im Vergleich damit $\cos 2\,\eta$ vernachlässigt, so daß (1.11) übergeht in

$$u_\xi = \frac{2\,Q}{\pi\, r}\,(1 - \cos 2\,\eta)\,. \tag{1.13}$$

Im Spalt selbst ist dagegen

$$u = \frac{4\,Q}{d\pi} \sin \eta\,, \tag{1.14}$$

d. h. also elliptisch verteilt, da

$$\sin \eta = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} .$$

**3. Schlitzblende bei mäßigen *Reynolds*zahlen.** Wenn man sich auf reine Radialströmungen beschränkt, d. h. also die unmittelbare Umgebung des Spaltes selbst ausschließt, ist nach dem Vorgang von *G. B. Jeffery*[1] und *G. Hamel*[2] eine exakte Lösung der *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen auch bei Berücksichtigung der Trägheitsglieder möglich. Bezeichnet man mit $u$ die Radialgeschwindigkeit, so nehmen die Differentialgleichungen in Polarkoordinaten $r$, $\vartheta$ folgende Form an:

$$u \frac{\partial u}{dr} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{dr} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) , \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{r \, \partial \vartheta} = \frac{2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} , \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial (u \, r)}{\partial r} = 0 . \tag{2.3}$$

Aus der letzten Gleichung folgt dann

$$u \, r = F(\vartheta) \tag{2.4}$$

und damit aus (2.2)

$$p = \frac{2 \mu}{r^2} F(\vartheta) + h(r) , \tag{2.5}$$

wobei $h$ zunächst noch eine beliebige Funktion von $r$ ist. Setzt man diese Ergebnisse in (2.1) ein:

$$F'' + 4 F + \frac{F^2}{\nu} = \frac{r^3 h'(r)}{\mu} , \tag{2.6}$$

so ist offenbar zu schließen, daß

$$h(r) = -\frac{\mu C}{2 r^2} + \text{konst} .$$

Die Randbedingungen lauten

$$F = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta = \pm \tfrac{\pi}{2} .$$

Ferner gilt für die durchströmende Menge $Q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F \, d\vartheta$. Da es sich um eine flächenhafte Menge handelt, kann man $|Q|/\nu = R$, also gleich einer *Reynolds*schen Zahl setzen. Mit $f_1 = F/Q$ geht (2.6) über in

$$f_1'' + 4 f_1 + R f_1^2 = C_1 . \tag{2.7}$$

Im Grenzübergang $R \to 0$ erhält man offenbar bei Beachtung der Randbedingungen

$$u = \frac{Q}{r \pi} (1 + \cos 2 \vartheta) . \tag{2.8}$$

Dies ist aber, abgesehen von einer anderen Wahl des Nullpunktes von $\vartheta$ gegenüber $\eta$ identisch mit (1.13).

Für den Druckverlauf gilt

$$p = \frac{2 \mu Q}{\pi r^2} \cos 2 \vartheta + \text{const.} \tag{2.9}$$

Dabei ist also $Q$ auf der Einströmseite negativ, auf der Ausströmseite positiv; die Konstante ist auf beiden Seiten verschieden, jedoch unbestimmt. Vergleichen wir den Druckverlauf nach Formel (2.9) mit demjenigen nach der strengen Formel (1.6), und zwar auf der Mittellinie, d. h. für $\vartheta = 0$ bzw. $\eta = \pi/2$. Unter Berücksichtigung von $y = c \, \mathfrak{Sin} \, \xi$ auf der Mittellinie geht (1.6) über in

$$p = -\frac{4 \mu Q}{\pi c^2} \frac{1}{\sqrt{1 + c^2/y^2}} . \tag{2.10}$$

[1] *G. B. Jeffery*, Phil. Mag. Ser. 6, 29 (1915) S. 455.
[2] *G. Hamel*, Deutsche Math. Vereinigung 25 (1916) S. 34, engl. Übersetzung NACA TM 1342 (1953).

Durch asymptotische Entwicklung für große $y$ ergibt sich

$$p \sim -\frac{4\mu Q}{\pi c^2}\left(1 - \frac{c^2}{2y^2} + \cdots\right). \tag{2.11}$$

Man erkennt daraus, daß zumindest auf der Mittellinie (2.9) den Anfang einer asymptotischen Entwicklung der strengen Lösung darstellt. Durch Vergleich zwischen (2.9) und (2.11) kann auch die Konstante bestimmt werden.

In Abb. 2 ist der Druckverlauf in der Mittelachse nach der strengen Formel und nach der asymptotischen Lösung aufgetragen. Man entnimmt aus der Auftragung, daß die asymptotische Lösung etwa bis zu einer Entfernung vom Schlitz gleich der Schlitzweite gültig ist.

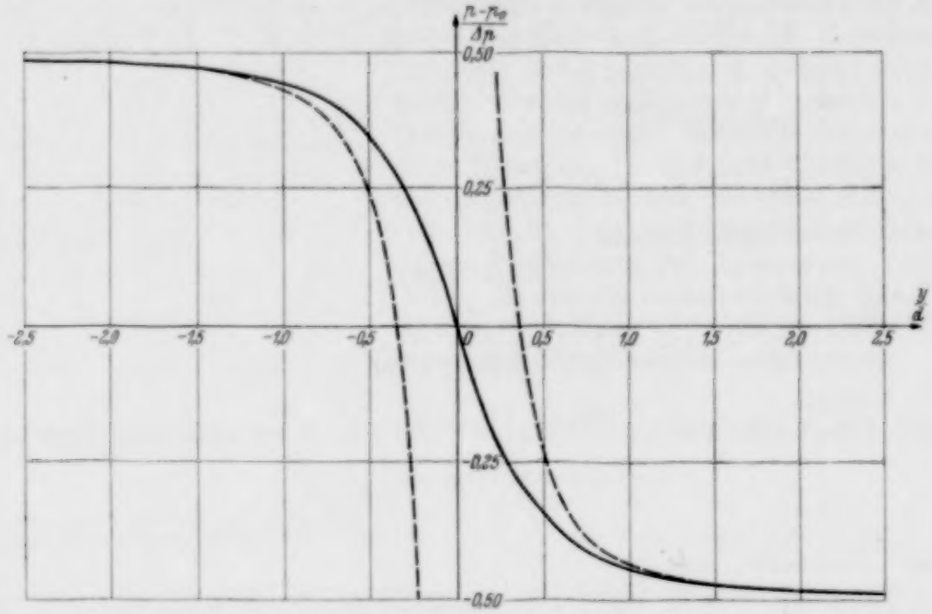


Abb. 2. Druckverlauf in der Mittelebene ($\eta = \pi/2$) bei der Strömung durch eine Schlitzblende für $R = 0$. Die ausgezogene Kurve entspricht der exakten Lösung (2.10), die gestrichelte Kurve der asymptotischen Näherungsformel (2.11).

Um eine Lösung für allgemeine $R$ zu erhalten, wollen wir zu $f = Rf_1$ übergehen, womit (2.7) folgende Form annimmt:

$$f'' + 4f + f^2 - C_2 = 0\,. \tag{2.12}$$

In der Mitte (d. h. für $\vartheta = 0$) ist aus Symmetriegründen $f' = 0$. und $f = f_m$. Durch weitere Integration von (2.12) erhält man

$$\vartheta = \int_{f_m}^{f} \frac{df}{\sqrt{D + 2C_2 f - 2/3 f^3 - 4f^2}} \tag{2.13}$$

mit der Bedingung $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\, d\vartheta = \pm R$ .

Wenn $f_0 \geq f_1 \geq f_2$ die Wurzeln des Nenners sind, können wir (2.13) in der Form schreiben

$$\vartheta\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{f_m}^{f} \frac{df}{\sqrt{(f_0 - f)(f_1 - f)(f_2 - f)}}\,. \tag{2.14}$$

Durch Vergleich mit (2.13) gilt ferner

$$f_0 + f_1 + f_2 = -6. \tag{2.15}$$

Als Lösung kommt nur der Wertbereich $f_0 \geq f \geq f_1$ in Betracht, wobei $f_0 \geq 0$ sein muß, um die Bedingungen an der Wand erfüllen zu können. Eine der Wurzeln muß dabei gleich dem Wert $f_m$ in der Mitte sein und zwar gilt im Fall des Einströmens $f_m = f_1$, für den Fall des Ausströmens $f_m = f_0$.

Wie schon *Hamel* gezeigt hat, ist ein reines Ausströmen in eine Halbebene (Winkel 180°) nur für den Grenzfall $R = 0$ möglich, für den bereits eine exakte Lösung angegeben wurde. Für endliche *Reynolds*zahl sind also auf der Ausströmseite nur radiale Strömungen mit teil-

weisem Einströmen an der Wand möglich. In Abb. 3 ist dieser Lösungstyp mit den im folgenden gebrauchten Bezeichnungen schematisch dargestellt.

Durch die Substitution $\sqrt{f_0 - f} = t$ erhält man das unvollständige elliptische Integral erster Gattung

$$\vartheta \sqrt{\frac{1}{6}} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t)\,(c^2 - t^2)}}\,. \tag{2.16}$$

Hierbei ist

$$a^2 = f_0 - f_1,$$
$$c^2 = f_0 - f_2 = 2f_0 + f_1 + 6\,.$$

$c$ wird also hier vorübergehend in einer anderen Bedeutung gebraucht. Dabei ist die Bedingung (vgl. Abb. 3)

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$$

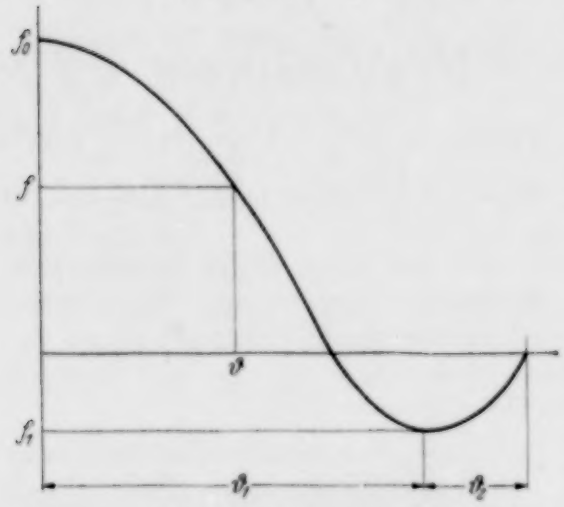


Abb. 3. Geschwindigkeitsverteilung bei einer radialen Strömung.

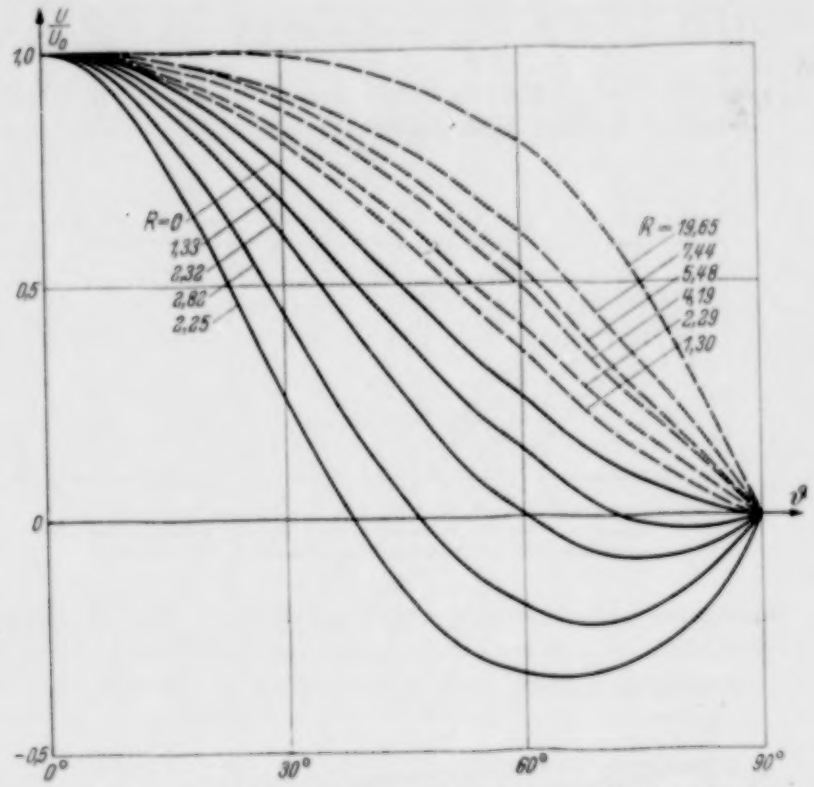


Abb. 4. Geschwindigkeitsverteilung auf der Einströmseite (gestrichelt) und Ausströmseite (ausgezogen) einer Schlitzblende bei verschiedenen *Reynolds*zahlen.

zu erfüllen oder nach Einführung des unvollständigen elliptischen Integrals $F(\alpha, \varphi)$ in der bei *Jahnke-Emde*, Funktionstafeln, tabellierten Form

$$F(\alpha, \varphi_1) + F(\alpha, \varphi_2) = \sqrt{\frac{c^2}{6}}\,\frac{\pi}{2}\,, \tag{2.17}$$

wobei

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right), \qquad \varphi_1 = \pi/2, \qquad \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{c}{a}\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}\right).$$

Die Gleichung (2.16) muß durch schrittweise Näherung aufgelöst werden. Zu einem gegebenen $f_0$ wird so das zugehörige $f_1$ bestimmt. Nach dessen Ermittlung können leicht Zwischenwerte berechnet werden, wobei zu einem gegebenen $f$ der Winkelabstand $\vartheta$ (Abb. 3) folgendermaßen bestimmt wird:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{6}{c^2}}\,F(\alpha, \varphi) \tag{2.18}$$

mit

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{f_0 - f}{a^2}}\,.$$

Auf diese Weise sind die ausgezogenen Kurven in Abb. 4 ermittelt worden. Die Kurve $f_0 = 0$ entspricht der Verteilung $\cos^2\vartheta$. Durch Integration $\int_{-\pi/2}^{\pi/3} f\,d\vartheta$ erhält man die *Reynolds*zahl $R$. Wenn man $R$ über $f_0$ aufträgt (Abb. 5), erkennt man, daß nur *Reynolds*zahlen bis $R = 2{,}85$ mit radialen Stromlinien in genügendem Abstand vom Schlitz möglich sind.

Auf der Einströmseite geht die Berechnung ganz entsprechend vor sich. Nur beschränkt sich hier der Wertevorrat von $f$ auf den mit $\vartheta_2$ bezeichneten Bereich. Entsprechend gilt hier die

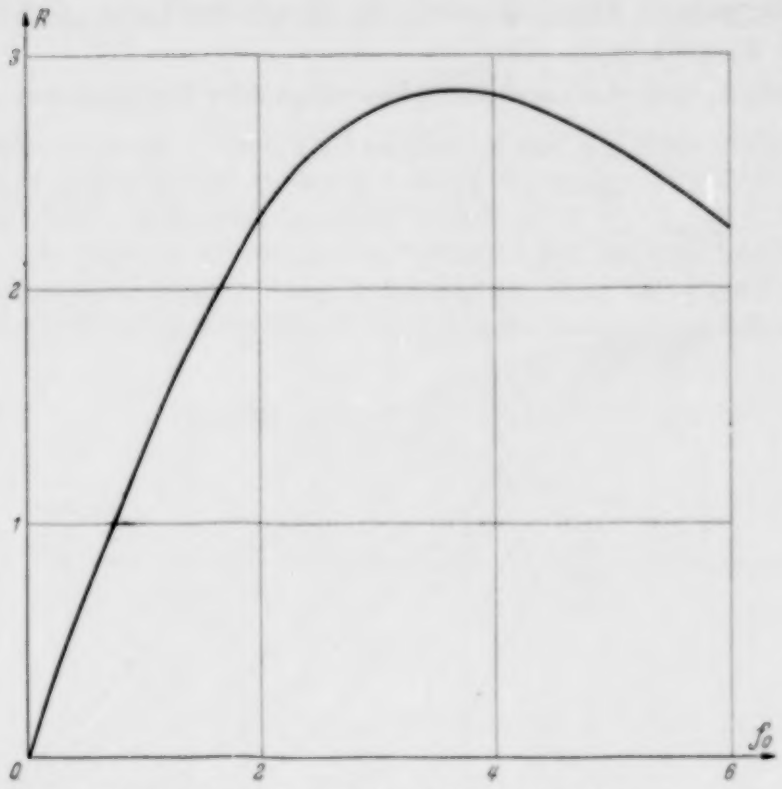


Abb. 5. Abhängigkeit der *Reynolds*schen Zahl von der größten Ausströmgeschwindigkeit bei Annahme von radialen Stromlinien.

Bedingung $\vartheta_2 = \pi/2$. In Abb. 4 sind gestrichelt einige Geschwindigkeitsverteilungen auf der Einströmseite aufgetragen.

Man erkennt dabei, daß die Geschwindigkeitsverteilung auf der Einströmseite sich mit zunehmender *Reynolds*scher Zahl einer „Grenzschichtlösung" nähert, bei der der Geschwindigkeitsabfall sich auf den wandnahen Teil beschränkt. Dies wird noch deutlicher, wenn man die Druckverteilung aufträgt, die nach (2.5) gegeben ist durch:

$$p = \frac{2\mu}{r^2}\left(F - \frac{C}{4}\right) + \text{konst.}$$

$$= \frac{2\mu Q}{r^2}\,\frac{1}{R}\left(f - \frac{C_2}{4}\right) + \text{konst.}\,, \quad (2.19)$$

wobei

$$C_2 = -\frac{1}{3}(f_0 f_1 + f_1 f_2 + f_2 f_0)\,. \quad (2.20)$$

Die auf diese Weise für die Einströmseite berechneten Druckverteilungen (Abb. 6) lassen erkennen, daß für $R = 0$ der Druck entsprechend der Funktion $\cos 2\vartheta$ verteilt ist und sich mit wachsender *Reynolds*scher Zahl immer mehr einer gleichförmigen Verteilung nähert, wie es von der Grenzschichttheorie vorausgesetzt wird.

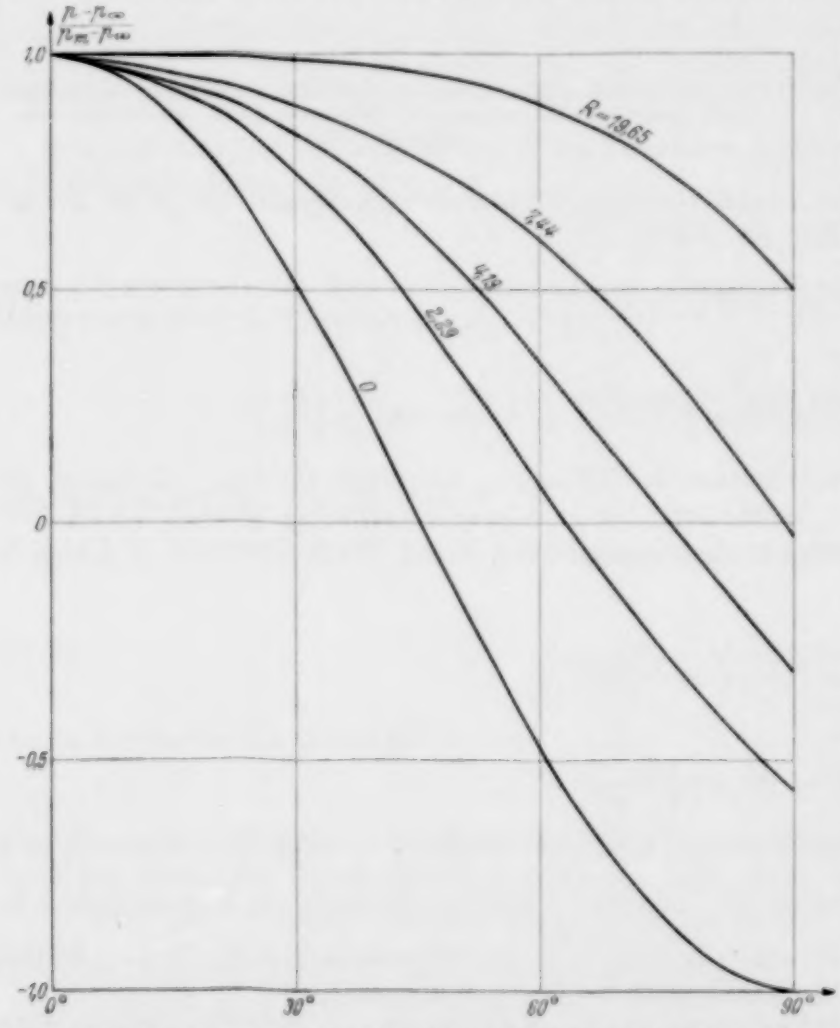


Abb. 6. Druckverlauf auf der Einströmseite einer Schlitzblende in Abhängigkeit von der Re-Zahl

Die Grenzschichtlösung kann übrigens in einfacher Weise durch Spezialisierung der Lösung (2.14) gewonnen werden. Wenn sich der Geschwindigkeitsabfall nur auf die Wandschicht beschränkt, muß im mittleren Teil $f' = f'' = 0$ sein. Dies führt aber auf die Bedingung $f_1 = f_2$ und somit wegen (2.15) auf

$$f_0 = -2f_1 - 6.$$

Die Lösung (2.14) nimmt damit folgende Form an:

$$\vartheta\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{f_1}^{f} \frac{df}{(f - f_1)\sqrt{-(2f_1 + 6f)}}\,. \quad (2.21)$$

Dieses Integral kann aber durch die Substitution $y = \sqrt{-(2f_1 + 6 + f)}$ leicht berechnet werden. Wenn man die Integrationskonstante so bestimmt, daß am Rande, d. h. für $\vartheta_0 = \pi/2\, f = 0$ wird, erhält man die Lösung

$$\sqrt{\frac{1}{6}}(\vartheta_0 - \vartheta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-(3f_1 + 6)}}\left(\operatorname{Ar\,tg}\sqrt{\frac{2f_1 + 6 + f}{3f_1 + 6}} - \operatorname{Ar\,tg}\sqrt{\frac{2f_1 + 6}{3f_1 + 6}}\right) \quad (2.22)$$

oder nach $f$ aufgelöst

$$f = (3 f_1 + 6)\, \mathfrak{Tg}^2 \left[ \sqrt{-\frac{1}{2}(f_1 + 2)}\, (\vartheta_0 - \vartheta) + \mathfrak{Ar\,tg} \sqrt{\frac{2 f_1 + 6}{3 f_1 + 6}} \right] - (2 f_1 + 6)\,. \quad (2.23)$$

Mit wachsender *Reynolds*scher Zahl nimmt $f_1$ große negative Werte an, so daß die Zahl 2 als Summand daneben vernachlässigt werden kann. Setzt man noch $f_1 = -A/\nu$, so daß außerhalb der Grenzschicht die Geschwindigkeit durch $u = -A/r$ gegeben ist, so erhält man die erstmals von *K. Polhausen*[1] abgeleitete Grenzschichtlösung:

$$f = -3 \frac{A}{\nu} \mathfrak{Tg}^2 \left[ \sqrt{\frac{A}{2\nu}}\, (\vartheta_0 - \vartheta) + 1{,}146 \right] + 2 \frac{A}{\nu}\,. \quad (2.24)$$

Man kann (2.19) benutzen, um den Druckverlust auf der Einströmseite angenähert zu berechnen. Für $R \to 0$ ist der Druckverlust auf der Einströmseite gleich dem halben Gesamtdruckverlust, also nach (1.12) gegeben durch

$$\Delta p_{e0} = \frac{16}{\pi} \frac{Q}{d^2} \mu\,.$$

Entsprechend kann man für $R \neq 0$ formal setzen

$$\Delta p_e = \frac{16\, Q}{\pi\, d^2} \mu \left[ \frac{\pi}{2\, R} \left( f - \frac{C_2}{u} \right) \right] = \Delta p_{e0}\, G_1(R)\,. \quad (2.25)$$

Die Funktion

$$G_1(R) = \Delta p_e / \Delta p_{e0}$$

ist in Abb. 7 aufgetragen. Sie nähert sich für große $R$ asymptotisch der Geraden

$$G_1(R) \sim \frac{\pi}{32} R \sim \frac{\pi}{32} \frac{Q}{\nu}\,,$$

woraus sich umgekehrt ergibt

$$\Delta p e_{R \to \infty} \sim \frac{1}{2} \frac{Q^2}{d^2} \varrho\,. \quad (2.26)$$

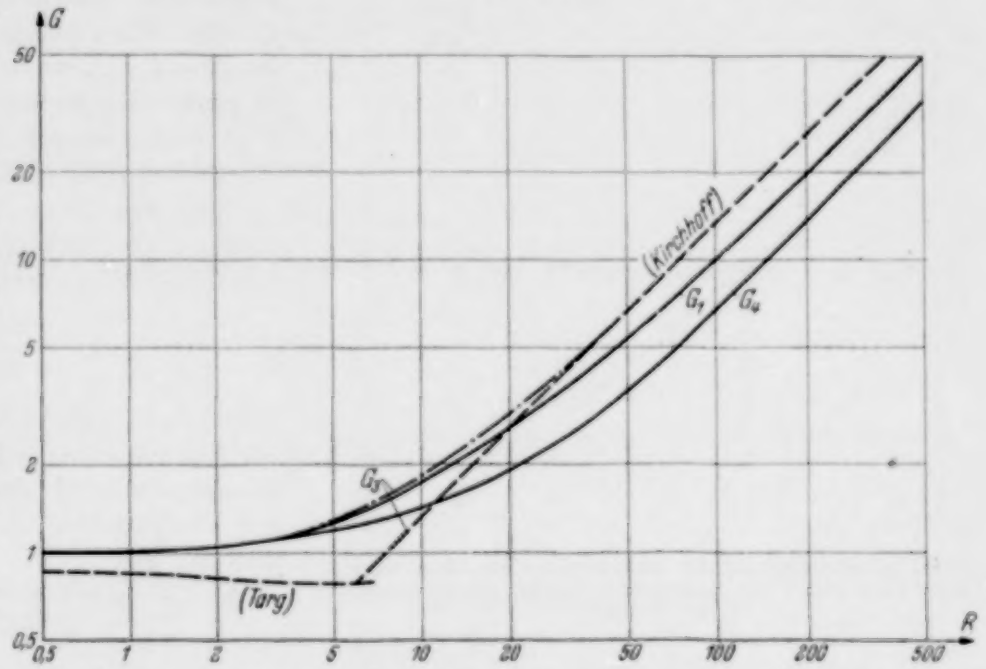


Abb. 7. Drucksprung bei der Schlitzblende und Lochblende [Formeln (2.25); (2.29); (3.18)]

Dies entspricht dem sich aus der *Bernoulli*schen Gleichung ohne Berücksichtigung der Strahlkontraktion ergebenden Wert.

Wesentlich schwierigere Verhältnisse liegen auf der Ausströmseite vor. Die vorhergehende Untersuchung ergab lediglich unter welchen Bedingungen als asymptotische Lösungen Radialströmungen möglich sind, ohne daß aber gesichert ist, daß solche sich überhaupt einstellen.

Die laminare Diffusor-Strömung ist wohl erstmalig von *H. Blasius*[2] untersucht worden und zwar für einen exponentiell erweiterten Diffusor. Die an einem gleichartigen Diffusor durchgeführten Messungen von *G. N. Patterson*[3] ergaben allerdings erheblich niedrigere Werte für die Durchflußmenge, bei der die Strömung abzureißen beginnt. Neuerdings ist das gleiche Problem für den keilförmigen Diffusor von *M. Abramowitsch*[4] und *S. M. Targ*[5] mit einem höheren Grad der Näherung untersucht worden, Wenn auch die Rechnung sich in diesen beiden Fällen auf verhältnismäßig kleine Diffusorwinkel bezieht, so können doch die Ergebnisse wenigstens als grobe Näherung auch für den Fall der Strömung hinter einer Schlitzblende angesehen werden. Für den hier besonders interessierenden Druckabfall erhält *Targ* die Beziehung

$$\frac{p_\infty - p_0}{\varrho\, U_0^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \mathfrak{Tg} \sqrt{\alpha R} / \sqrt{\alpha R}} - 2 \frac{\alpha}{R}\,; \quad (2.27)$$

$\alpha$ steht hier als Näherung für $\sin \alpha$ und ist demnach im vorliegenden Fall durch $\sin \alpha = 1$ zu

[1] *Polhausen*, Z. Angew. Math. Mech. 1 (1921) S. 252.
[2] *Blasius*, Z. Math. Mech. Phys 58 (1910) S. 225.
[3] *Patterson*, Canad. J. Research 12 (1935) S. 676.
[4] *Abramowitsch*, J. Math. Phys. 28. (1949). S. 1.
[5] *Targ*, Osnovnye zadač teorii laminarnyi tečenii (Hauptprobleme der Theorie d. laminaren Strömungen.) Moskau 1951.

ersetzen. Die *Reynolds*sche Zahl $R$ bezieht sich auf die mittlere Geschwindigkeit im Schlitz und die Schlitzbreite und ist demnach $R = Q/\nu$. Um den Anschluß an den Grenzfall $R = 0$ zu finden, für den eine strenge Lösung vorliegt, setzen wir

$$p_\infty - p_0 = \frac{16}{\pi}\frac{Q}{d^2}\mu\, G_2(R)\,, \tag{2.28}$$

wobei

$$G_2(R) = \frac{\pi}{16}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \mathfrak{T}\mathfrak{g}\sqrt{R}/\sqrt{R}} - \frac{2}{R}\right] R\,.$$

Diese Funktion ist in Abb. 8 aufgetragen. Für kleine Werte von $R$ liefert die Formel jedenfalls zu kleine Werte, weil $G_2(0) = 1$ sein muß. Für $R = 8{,}3$ wird $G_2 = 0$, d. h. auf der Ausströmseite fällt der Druck nicht mehr ab. Die Zähigkeitsspannungen überwiegen nicht mehr gegenüber den Trägheitskräften. Bereits bei geringer Überschreitung dieses Wertes, nämlich für $R = 9{,}87$, löst sich nach *Targ* die Strömung in großer Entfernung vom Schlitz ab und bei weiter wachsender *Reynolds*scher Zahl wandert die Ablösestelle immer näher an den Schlitz.

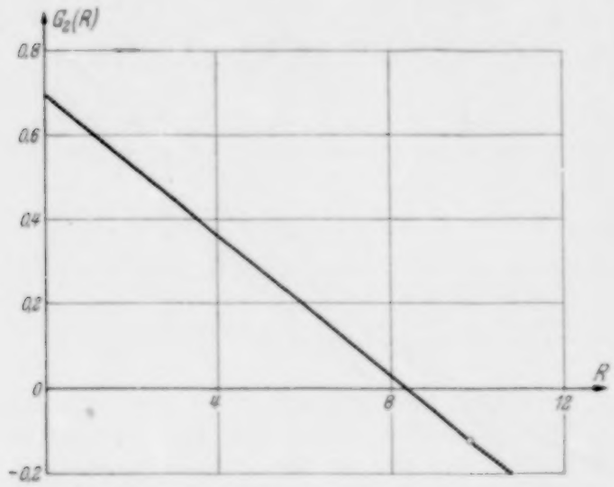

Abb. 8. Drucksprung auf der Ausströmseite einer Schlitzblende nach *Targ*. Der Kreis kennzeichnet beginnende Strömungsablösung.

Für den Gesamtdruckabfall beim Durchströmen der Schlitzblende kann man folgenden Ansatz machen:

$$\Delta p = \frac{32}{\pi}\frac{Q}{d^2}\mu\, G_3(R)\,, \tag{2.29}$$

wobei $G_3 = \frac{1}{2}(G_1 + G_2)$ ist. Nach der strengen Lösung ist dabei $G_3(0) = 1$ während für große $R$ entsprechend der *Kirchhoff*schen Theorie der Ausflußzahl[1] folgende asymptotische Beziehung gilt:

$$G_3(R) \sim \frac{(\pi+2)^2}{64\,\pi}\,R = 0{,}132\,R\,. \tag{2.30}$$

Für mäßige Werte von $R$ sind die im vorhergehenden nach der Formel von *Targ* errechneten Werte in Abb. 7 eingetragen. Vergleichbare Messungen liegen nicht vor. Doch läßt ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen bei der Lochblende vermuten, daß $G_3$ höher liegen muß und etwa den strichpunktierten Verlauf hat.

Für den ausgebildeten ebenen laminaren Strahl ist die Geschwindigkeitsverteilung von *W. G. Bickley*[2] berechnet worden. Die Stromlinien sind dabei gekrümmt, Druck und Impuls bleiben längs des Strahles konstant. Auf den Druckabfall beim Durchströmen des Schlitzes können hieraus also keine Folgerungen gezogen werden. Auch ist der Umschlag des laminaren Strahles zur Turbulenz, der von *C. C. Lin*[3] und Mitarbeitern untersucht wurde, offenbar ohne Einfluß auf den Druckabfall.

**4. Die Lochblende; Grenzfall sehr kleiner *Reynolds*zahl.** Zur Beschreibung der rotationssymmetrischen Strömung durch eine Lochblende gehen wir von dem rechtwinkligen $(x, y, z)$-Koordinatensystem zu einem krummlinigen, orthogonalen $(\xi, \eta, \zeta)$-Koordinatensystem über, wobei zwischen beiden folgenden Relationen bestehen mögen:

$$x = f(\xi,\eta)\cos\zeta\,, \qquad y = g(\xi,\eta)\,, \qquad z = f(\xi,\eta)\sin\zeta\,. \tag{3.1}$$

Es ist also angenommen, daß die $y$-Achse die Symmetrieachse bildet. Die örtlich veränderlichen Maßstabsfaktoren der $(\xi, \eta, \zeta)$-Koordinaten sind dann

$$H_1 = \sqrt{f_\xi^2 + g_\xi^2}\,, \qquad H_2 = \sqrt{f_\eta^2 + g_\eta^2}\,, \qquad H_3 = f\,. \tag{3.2}$$

Im Grenzfall $R \to 0$, d. h. bei Vernachlässigung der Trägheitsglieder, nehmen die *Navier-Stokes*-

[1] Vgl. *W. Kaufmann*, Angewandte Hydromechanik II. Bd. Berlin 1934.
[2] *Bickley*, Phil. Mag. Ser. 7, 23 (1937) S. 727.
[3] *J. R. Foote* u. *C. C. Lin*, Quart. appl. Math. 8, (1950) S. 265. *P. Chiarulli*, Stability of two-dimensional velocity distributions of the half-jet type, Thesis Brown University 1949.

schen Differentialgleichungen bei Rotationssymmetrie folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{H_1}\frac{\partial p}{\partial \xi} &= -\mu\,\frac{1}{H_2 H_3}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{H_3}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial (H_2 u_\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial (H_1 u_\xi)}{\partial \eta}\right)\right], \\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial p}{\partial \eta} &= \mu\,\frac{1}{H_3 H_1}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{H_3}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial (H_2 u_\xi)}{\partial \eta} - \frac{\partial (H_1 u_\xi)}{\partial \eta}\right)\right] \quad \frac{\partial (u_\xi H_2 H_3)}{\partial \xi} + \frac{\partial (u_\xi H_3 H_1)}{\partial \eta} = 0\,. \end{aligned}\right| \tag{3.3}$$

Wir untersuchen zunächst, ob außerhalb der nächsten Umgebung des Loches radiale Strömungen möglich sind und nehmen daher zunächst ein räumliches Polarkoordinatensystem an. Dabei ist in (3.1) $f(\xi, \eta) = \xi \sin \eta$ und $g(\xi, \eta) = \xi \cos \eta$ zu setzen. Man findet damit

$$H_1 = 1\,, \qquad H_2 = \xi\,, \qquad H_3 = \xi \sin \eta\,. \tag{3.4}$$

Setzt man noch $u_\eta = 0$ voraus, so geben die beiden ersten Gleichungen (3.3) über in

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \mu\,\frac{1}{\xi^2 \sin \eta}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sin \eta \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta}\right), \tag{3.5a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\,\eta\,\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \xi\,\partial \eta}\,. \tag{3.5b}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung findet man ferner

$$u_\xi\,\xi^2 \sin \eta = F_1(\eta) \sin \eta\,, \tag{3.6}$$

wobei also $F_1(\eta)$ eine noch zu bestimmende Funktion von $\eta$ ist. Durch Einsetzen von (3.6) in (3.5b) findet man

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{2\,\mu}{\xi^3}\,F_1'(\eta)$$

und durch Integration

$$p = \frac{2\,\mu}{\xi^2}\,F_1(\eta) + h(\xi)\,: \tag{3.7}$$

$h(\xi)$ bestimmt man zu $h(\xi) = \dfrac{C}{\xi^3} + C_1$.

Einsetzen in (3.5a) liefert schließlich folgende Differentialgleichung für $F_1(\eta)$:

$$6\,F_1 + 6\,C + F_1'' + \operatorname{cotg} \eta\,F_1' = 0\,. \tag{3.8}$$

Bei Berücksichtigung der Randbedingungen $F_1 = 0$ für $\eta = \pm \pi/2$ lautet die Lösung

$$F_1 = -\,3\,C \cos^2 \eta\,. \tag{3.9}$$

Die Konstante $C$ bestimmt man aus der Durchflußmenge

$$Q = \int_0^{\pi/2} 2\pi\,\xi^2 \sin \eta\,u_\xi\,d\eta = -\,2\pi\,C\,.$$

Damit wird also die Geschwindigkeitsverteilung

$$u = \frac{3}{2\pi}\,\frac{Q}{\xi^2}\cos^2 \eta \tag{3.10}$$

und der Druck

$$p = -\,\frac{\mu\,Q}{\pi\,\eta^3}(1 - 3\cos^2 \eta) + \text{konst.} \tag{3.11}$$

Die vorstehende Untersuchung hat gezeigt, daß die Stromlinien auch im Fall der Lochblende bei sehr kleinen *Reynolds*schen Zahlen radial verlaufen. Die Konstante in Formel (3.11) ist auf beiden Seiten der Lochblende verschieden, doch liefert diese nur in einer gewissen Entfernung vom Loch gültige Theorie keine Angaben über den Drucksprung. Es ist naheliegend, analog zum früher behandelten ebenen Fall die Stromlinienflächen als Rotations-Hyperboloide anzunehmen. Wir gehen also zu einem Koordinatensystem über, das durch Rotation der Kegelschnittkoordinaten in Abb. 1 um die $y$-Achse entsteht. Es ergeben sich somit folgende Zuordnungen:

$$x = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi \sin \eta \cos \zeta\,, \qquad y = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi \cos \eta\,, \qquad z = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi \sin \eta \sin \zeta\,, \tag{3.12}$$

$$H_1 = H_2 = c\sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,2\,\xi + \cos 2\,\eta}{2}}\,, \qquad H_3 = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi \sin \eta\,. \tag{3.13}$$

(Abweichend von Abb. 1 entspricht $\eta = 0$ der Mittelachse.)

Setzt man $u_\eta = 0$ voraus, so muß $u_\xi H_1 H_3 = F_2(\eta)$ sein, wobei wir $F_2(\eta)$ daraus bestimmen, daß wir für große $\xi$ wieder die alte Lösung (3.10) erhalten müssen. Die Gleichungen gehen über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \mu \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{1}{H_1^2}(F_2' - \operatorname{cotg}\eta\, F_2)\right], \\ \frac{\partial p}{\partial \xi} &= -\mu \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{H_2^2}(F_2' - \operatorname{cotg}\eta\, F_2)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Nach Einsetzen von $F_2' - \operatorname{cotg}\eta\, F_2 = -3\, Q/\pi \cos\eta \sin^2\eta$ und Integration erhält man aus der zweiten Gleichung (3.14) für den Druck $p$

$$p = \frac{3\,Q}{\pi}\frac{\mu}{c^3}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,2\,\xi + \cos 2\,\eta} + h(\xi)\right]. \tag{3.15}$$

Die Funktion $h(\xi)$ müßte man nun so bestimmen, daß die erste der Gleichung (3.14) erfüllt wird. Es zeigt sich, daß dies aber nicht streng möglich ist. Unsere Annahme, daß die Stromlinienflächen Rotationshyperboloide sind, ist also nur angenähert richtig. Wir können aber eine angenäherte Lösung erhalten, wenn wir die Funktion $h(\xi)$ so wählen, daß der Fehler möglichst klein ist. Wenn das Fehlerquadrat der Abweichung zwischen der rechten Seite

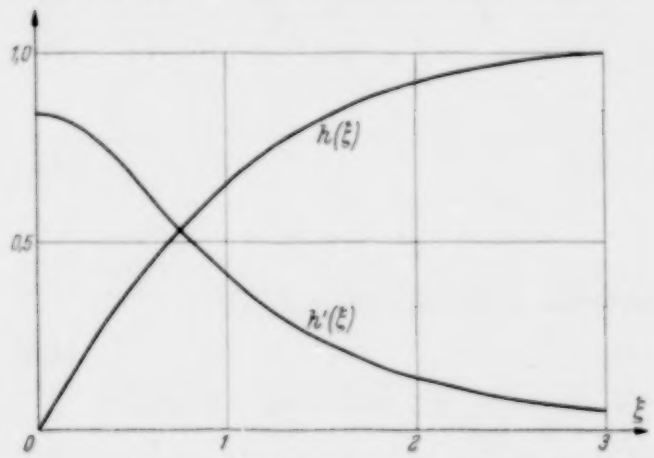


Abb. 9. Hilfsfunktion $h(\xi)$ zur Berechnung des Druckverlaufes bei der Lochblende vgl. Formel (3.15)].

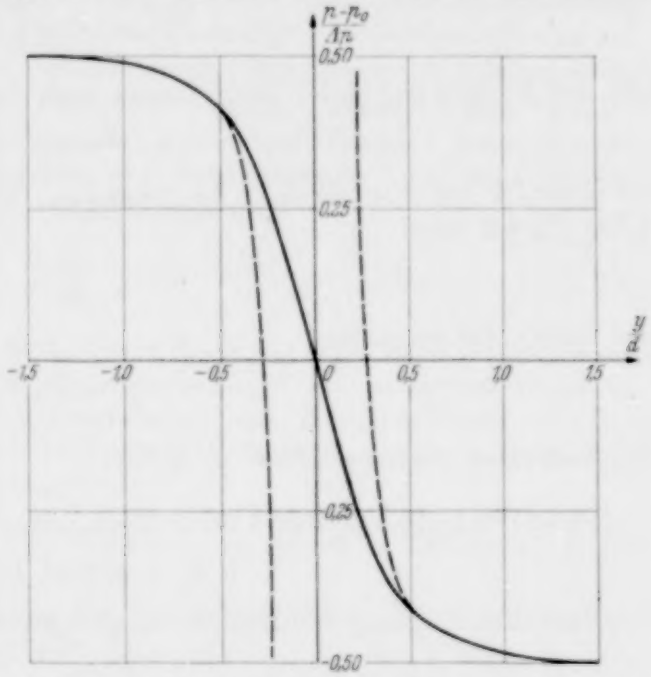


Abb. 10. Druckverlauf in der Mittelachse einer Lochblende bei $R = 0$ (gestricheltasymptotische Lösung mit radialen Stromlinien).

der ersten Gleichung (3.14) und der nach $\xi$ differentiierten Gleichung (3.15), über $\eta$ integriert, ein Minimum werden soll, erhält man

$$h'(\xi) = \frac{\mathfrak{Cof}^2\,\xi\,\mathfrak{Cof}^3\,2\,\xi + \frac{1}{4}(3\,\mathfrak{Cof}^2\,\xi + \mathfrak{Sin}^2\,\xi)\,\mathfrak{Cof}\,2\,\xi + \frac{3}{32}}{\mathfrak{Cof}\,\xi\,(\mathfrak{Cof}^4\,2\,\xi + \mathfrak{Cof}^2\,2\,\xi + 3/16)}. \tag{3.16}$$

Die Funktionen $h'(\xi)$ und $h(\xi)$ sind in Abb. 9 dargestellt. Da $h(\infty) - h(-\infty) = 2{,}10$ ist, erhält man für den Drucksprung bei der Lochblende

$$\Delta p = \frac{24}{\pi}\frac{Q\,\mu}{d^3} \cdot 2{,}10 = 50{,}4\,\frac{Q\,\mu}{\pi\,d^3}. \tag{3.17}$$

Experimentell ist von *Johannsen*[1] für den Grenzfall $R = 0$ gefunden worden

$$\Delta p = 66{,}8\,\frac{Q\,\mu}{\pi\,d^3}. \tag{3.17a}$$

Dieser Unterschied ist vermutlich nicht nur auf den Näherungscharakter der Rechnung zurückzuführen, sondern wird auch damit zusammenhängen, daß bei den Versuchen eine Blende mit endlicher Dicke und konisch zugeschärfter Öffnung verwendet wurde. Hierdurch ergibt sich offenbar eine Erhöhung des Durchflußwiderstandes gegenüber dem der Rechnung zugrundegelegten Idealfall.

Wie die Auftragung in Abb. 10 zeigt, vollzieht sich der Druckabfall bei der Lochblende auf einer kürzeren Strecke als bei der Schlitzblende. Für den Fall endlicher kleiner *Reynolds*scher

[1] A. a. O.

Zahlen können bei der Lochblende noch weniger Aussagen als im ebenen Fall gemacht werden. Radiale Strömungen in Analogie zu den *Jefferey-Hamel*schen Strömungen sind im rotationssymmetrischen Fall nicht möglich. Eine Lösung durch Reihenentwicklungen ist für das Diffusorproblem von *N. A. Sljozkin*[1] angegeben worden. Diese Reihen konvergieren jedoch nur für kleine Diffusorwinkel genügend schnell und können also auf das vorliegende Problem der Lochblende nicht angewandt werden. Andererseits liegen aber für die Lochblende die experimentellen Ergebnisse von *Johannsen* vor, nach denen man für den Druckabfall setzen kann

$$\Delta p = 66{,}8 \frac{Q\mu}{\pi d^3} G_4(R) , \tag{3.18}$$

wobei $G_4$ in Abb. 7 eingetragen ist. Diese Werte sind an einer in ein Rohr eingebauten Blende erhalten worden und gelten für den Fall, daß die Blendenöffnung klein gegen den Lochdurchmesser ist.

Nach den Beobachtungen von *Johannsen* ist der Stromlinienverlauf bis zu *Reynolds*schen Zahlen $R = u_0 d/\nu = 10$ zu beiden Seiten der Blende symmetrisch, bei größerer *Reynolds*zahl beginnt die Strömung in Übereinstimmung mit den theoretischen Betrachtungen im ebenen Fall sich von der Wand abzulösen. Bei $R = 30$ zeigt der Strahl schon deutlich abgelöste Struktur, ist aber weiterhin laminar. Der laminare Strahl beginnt etwa bei $R = 150$ instabil zu werden. Bei Überschreitung dieses Wertes bilden sich am Strahlrand Wirbelrippeln, die bei weiterer Vergrößerung der *Reynolds*zahl in ausgeprägte Wirbelringe übergehen in Analogie zum ebenen Fall der *Kármàn*schen Wirbelstraße. Die Wirbelringe rufen stromabwärts Turbulenz hervor. Über den Zähigkeitseinfluß bei größeren *Reynolds*schen Zahlen liegen Untersuchungen von *M. Hansen*[2] vor.

**5. Zusammenfassung.** Bei der Strömung durch Schlitz- und Lochblenden ist für sehr kleine *Reynolds*sche Zahlen ($R < 2$, wobei $R$ auf die Schlitzbreite bzw. den Lochdurchmesser bezogen wird) der Druckfall proportional der durchfließenden Menge. Erst bei größeren *Reynolds*schen Zahlen bildet sich eine quadratische Abhängigkeit heraus. Für das ebenen Problem und den Grenzfall $R = 0$ wird eine exakte Lösung der *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen mit auf der Ein- und Ausströmseite symmetrischen Stromlinien hergeleitet und eine Formel für den Druckabfall aufgestellt. Für endliche *Reynolds*sche Zahlen existieren nur Näherungslösungen, die lediglich eine Abschätzung des Druckverlaufes in Abhängigkeit von der *Reynolds*schen Zahl liefern. Auf der Ausströmseite löst sich die Strömung etwa bei $R > \pi^2$ ab und bildet einen laminaren Strahl. Ähnliche Verhältnisse gelten auch für die Lochblende. Auch hier wird für den Fall $R = 0$ eine Lösung abgeleitet, die aber nur näherungsweise gültig ist. Der rechnerisch ermittelte Wert für den Druckabfall bei sehr kleiner *Reynolds*scher Zahl liegt etwa 25% unter dem von *Johannsen* (1930) gemessenen Wert. Der Unterschied ist vermutlich auf die endliche Dicke und konische Öffnung der Lochblende bei den genannten Versuchen zurückzuführen.

Aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.

(Eingegangen am 19. November 1953).

Anschrift des Verfassers: Dr. W. Wuest, Göttingen, Bunsenstraße 10.

[1] *Sljozkin*, Math. Sbornik 42 (1935) S. 43.
[2] *Hansen*, Über das Ausflußproblem, VDI-Forschungsheft 438 (1949/50).

# Zur Berechnung ebener und drehsymmetrischer Grenzschichten mit kontinuierlicher Absaugung.

Von K. Wieghardt.

**1. Einleitung.** Der Strömungswiderstand eines Körpers kann bekanntlich durch Absaugen der Grenzschicht oft wesentlich verringert werden. Einerseits kann dadurch etwa bei einem Körper mit stumpfer Hinterkante die Ablösung der Grenzschicht verzögert und damit der Druckwiderstand verkleinert werden, wie in den bekannten Strömungsaufnahmen von *L. Prandtl* aus dem Jahr 1904[1]. Andererseits kann aber auch der Reibungswiderstand stromlinienförmiger Körper mit vernachlässigbarem Druckwiderstand noch dadurch gesenkt werden, daß die laminare Grenzschicht durch Absaugen stabilisiert und somit nicht turbulent wird; denn besonders bei hohen *Reynolds*-Zahlen ist die laminare Reibung viel kleiner als die der turbulenten Reibungsschicht bei unbeeinflußter Strömung.

Bereits vor etwa zehn Jahren war aus theoretischen Arbeiten von *H. Schlichting*[2 3] und *J. Pretsch*[4] zu ersehen, daß auf diese Weise — auch bei Berücksichtigung der Absaugeleistung — der Widerstand um die Hälfte und mehr verringert werden könnte. Trotzdem sind nur wenige Versuche bekannt geworden, diese großen Möglichkeiten technisch zu verwirklichen. Nach den ersten Versuchen schien es so, als ob sich bei großen *Reynolds*-Zahlen (über $6 \cdot 10^6$) diese Methode der Widerstandssenkung wegen der aufzubringenden Absaugeleistung nicht lohnte[5]. Spätere Windkanalversuche[6 7] an einem Tragflügel aus gesinterter Bronze bestätigten aber die optimistische, theoretische Voraussage doch zum Teil. Die Ergebnisse für diesen Flügel (bei $Re = 6 \cdot 10^6$ und $20 \cdot 10^6$) sind in den Abb. 3 und 4 miteingetragen. Danach ist eine Widerstandssenkung von 50% und mehr auch bei Einbeziehung der Absaugleistung durchaus zu verwirklichen; allerdings läßt der unregelmäßige Gang der Widerstandsbeiwerte mit der *Reynolds*-Zahl noch auf Ungenauigkeiten der komplizierten Versuche schließen.

Dies alles bezieht sich auf kontinuierliche Absaugung durch eine poröse Oberfläche. Experimentell eingehender untersucht worden ist die Absaugung aus mehreren Einzelschlitzen in mehr oder weniger weiten Abständen voneinander. Dieser theoretisch wesentlich kompliziertere Fall der diskontinuierlichen Absaugegrenzschicht ist erst vor kurzem von *W. Wuest*[8] der Rechnung zugänglich gemacht worden. Es scheint, daß bei dieser technisch leichter zu verwirklichenden diskontinuierlichen Absaugung nicht so hohe Widerstandeinsparungen erwartet werden können, wie bei der theoretisch einfacheren aber praktisch schwierigeren kontinuierlichen Absaugung.

Im folgenden wird ein Näherungsverfahren zur Berechnung der stationären, inkompressiblen laminaren Grenzschicht bei kontinuierlicher Absaugung dargestellt, das sowohl für ebene wie für drehsymmetrische Körper gilt. Ein Verfahren für ebene Körper hat *H. Schlichting*[3] bereits 1945 entwickelt. Die von ihm speziell zur Darstellung der kontinuierlichen Absaugung aufgestellte Klasse von Grenzschichtprofilen wird für das vorliegende Verfahren übernommen. Methodisch ist dieses eine Erweiterung eines Verfahrens für ebene Grenzschichten ohne Absaugung von *A. Walz*[9], insofern als auch hier Impuls- und Energiesatz von einer einparametrigen Profilklasse erfüllt werden. Es ist vor allem zur direkten Berechnung der wirtschaftlich günstigsten Absaugung geeignet.

[1] *L. Prandtl*, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. d. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg 1904.

[2] *H. Schlichting*, Luftfahrtforschung 19 (1942), S. 293.

[3] *H. Schlichting*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 201.

[4] *J. Pretsch*, Die Leistungsersparnis durch Grenzschichtbeeinflussung beim Schleppen einer ebenen Platte. UM 3048 (1943).

[5] *A. E. von Doenhoff* und *L. K. Loftin*, Journ. aero Sci. 16 (1949), S. 729.

[6] *D. L. Burrows*, *A. L. Braslow* and *N. Tetervin*, Experimental and theoretical studies of area suction for the control of the laminar boundary layer on a porous bronze NACA 64 A 010 airfoil, NACA Techn. Note 1905 (1949).

[7] *A. L. Braslow* and *F. Visconti*, Further experimental studies of area suction for the control of the laminar boundary layer on a porous bronze NACA 64 A 010 airfoil, NACA Techn. Note 2112 (1950).

[8] *W. Wuest*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 90.

[9] *A. Walz*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 243.

**2. Näherungsverfahren.** Es wird wieder die mathematisch einschneidende Annahme gemacht, daß auch bei kontinuierlicher Absaugung die Geschwindigkeitsprofile durch eine einparametrige Kurvenschar angenähert werden können. Dann ist die Grenzschicht an jeder Stelle durch einen Formparameter und ein Maß für die Grenzschichtdicke bereits vollständig beschrieben. Als Parameter werde benutzt

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \tag{1}$$

mit

$$\delta_1 = \text{Verdrängungsdicke} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \tag{2}$$

und

$$\delta_2 = \text{Impulsverlustdicke} = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy\,, \tag{3}$$

wo $y$ den Wandabstand, $u$ die Geschwindigkeit innerhalb und $U$ diejenige außerhalb der Grenzschicht bezeichnen. Ein dimensionsloses Maß für die Dicke der Schicht ist die örtliche *Reynolds*-Zahl der Grenzschicht

$$re = \frac{U\,\delta_2}{\nu} \tag{4}$$

mit $\nu$ = kinematische Zähigkeit.

Zur Berechnung dieser zwei Größen, $H$ und $re$, abhängig von der Bogenlänge $s$ vom Staupunkt, genügen auch hier Impuls- und Energiegleichung, wenn außer der Geschwindigkeitsverteilung außerhalb der Schicht $U(s)$ auch die örtliche Körperradius $r_0(s)$ bei Drehkörpern und die Absaugeschwindigkeit $v_0(s)$ gegeben sind.

Der Impulssatz lautet bekanntlich

$$\frac{\tau_0}{\varrho U^2} = \frac{\varepsilon}{re} = \frac{1}{r_0}\frac{d}{ds}(r_0\,\delta_2) + (2 + H)\frac{\delta_2}{U}\frac{dU}{ds} - \frac{v_0}{U} \tag{5}$$

und analog dazu der Energiesatz

$$\frac{2\,D}{re} = \frac{1}{U^3 r_0}\frac{d}{ds}(U^3\, r_0\,\delta_3) - \frac{v_0}{U}\,. \tag{6}$$

Dabei bedeuten $\tau_0$ die Wandschubspannung, $\varrho$ die Dichte, $\varepsilon$ die dimensionslose Wandtangente des Profils

$$\varepsilon = \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta_2)}, \tag{7}$$

und $D$ eine dimensionslose Dissipationsfunktion

$$D = \int_0^\infty \frac{r}{r_0}\left(\frac{\partial u/U}{\partial y/\delta_2}\right)^2 d\,\frac{y}{\delta_2} \tag{8}$$

mit $r$ = Abstand von der Achse des Drehkörpers, und $\delta_3$ = Energieverlustdicke:

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left[1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2\right] dy\,. \tag{9}$$

Bei einer einparametrigen Profilklasse bestehen nun eindeutige Beziehungen zwischen den verschiedenen, dimensionslosen Parametern wie $H$, $\varepsilon$, $D$ oder

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2}\,. \tag{10}$$

Man kann sie daher alle als eindeutige Funktionen eines Parameters, z. B. von $H$, auffassen: $\varepsilon(H)$, $D(H)$ und $H_{32}(H)$.

Dann lassen sich aus den zunächst noch allgemein gültigen Gleichungen (5) und (6) sofort zwei Differentialgleichungen für die Unbekannten $H$ und $re$ ableiten, die in dimensionslosen

Größen geschrieben lauten

$$\frac{dH}{d\sigma} = -f(H)\,\frac{1}{U/U_0}\,\frac{d(U/U_0)}{d\sigma} - g(H)\,\frac{U}{U_0}\,\frac{Re}{re^2} + h(H)\,\frac{Re}{re}\,\frac{v_0}{U_0}, \tag{11}$$

$$\frac{d\,re}{d\sigma} = -\left\{\frac{H+1}{(U/U_0)}\,\frac{d(U/U_0)}{d\sigma} + \frac{1}{(r_0/R)}\,\frac{d(r_0/R)}{d\sigma}\right\} re + \varepsilon\,\frac{U}{U_0}\,\frac{Re}{re} + Re\,\frac{v_0}{U_0}. \tag{12}$$

Darin bedeuten $R$ eine charakteristische Länge, z. B. der größte Radius des Drehkörpers, $\sigma = s/R$ die dimensionslose Bogenlänge vom Staupunkt aus gemessen, $U_0$ die Anströmgeschwindigkeit und

$$Re = \frac{U_0 R}{\nu}; \tag{13}$$

$f$, $g$ und $h$ sind Funktionen des Profilparameters $H$, die für die zugrunde gelegte Profilklasse einmal berechnet werden müssen:

$$\left.\begin{aligned} f(H) &= -\frac{H_{32}(H-1)}{N}, \\ g(H) &= -\frac{2D - \varepsilon H_{32}}{N}, \end{aligned}\right| \tag{14}$$

$$h(H) = -\frac{H_{32}-1}{N} \tag{15}$$

und

$$N = \frac{dH_{32}}{dH}. \tag{16}$$

Zur schrittweisen Integration des Systems (11) und (12) denken wir uns, ähnlich wie in[1] alle auftretenden Funktionen der Bogenlänge über das jeweilige Intervall linearisiert. Die Schrittlänge $\Delta s$ von der Bogenlänge $s_1$ bis $s_2$ muß so klein gewählt werden, daß alle Funktionen in diesem Intervall genügend genau durch Geradenstücke angenähert werden können. Dann lassen sich Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzen, wie z. B. in

$$\gamma = \frac{1}{U}\,\frac{dU}{ds}\,\Delta s \approx \frac{U_2 - U_1}{\frac{1}{2}(U_1 + U_2)} \tag{17}$$

und

$$\omega = \frac{1}{r_0}\,\frac{dr_0}{ds}\,\Delta s \approx \frac{(r_0)_2 - (r_0)_1}{\frac{1}{2}[(r_0)_1 + (r_0)_2]}. \tag{18}$$

Für die gesuchten Zuwächse von $\Delta re$ und $\Delta H$ ergibt sich dann

$$\Delta re = \frac{-\{(H+1)\gamma + \omega\}\,re_1 + \varepsilon\,\frac{\bar{U}}{U_0}\,\frac{Re}{re_1}\,\Delta\sigma + \frac{\bar{v}_0}{U_0}\,Re\,\Delta\sigma}{1 + (H+1)\gamma + \omega - \frac{1}{2}\,\frac{\bar{v}_0}{U_0}\,\frac{Re}{re_1}\,\Delta\sigma} \tag{19}$$

und

$$\Delta H = \frac{-f\gamma - g\,\frac{\bar{U}}{U_0}\,\frac{Re}{\bar{re}^2}\,\Delta\sigma + h\,\frac{Re}{\bar{re}}\,\frac{\bar{v}_0}{U_0}\,\Delta\sigma}{1 + \frac{1}{2}\dot{f}\gamma + \frac{1}{2}\,g\,\frac{\bar{U}}{U_0}\,\frac{Re}{\bar{re}^2}\,\Delta\sigma - \frac{1}{2}\,\dot{h}\,\frac{Re}{\bar{re}}\,\frac{\bar{v}_0}{U_0}\,\Delta\sigma}. \tag{20}$$

Der Querstrich über $U$, $v_0$ und $re$ bedeutet Mittelbildung im Intervall also z. B. $\bar{U} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$. Der Punkt bezeichnet Differentiation nach $H$, z. B. $\dot{f} = df(H)/dH$. Die Funktionen $f$, $g$ und $h$ sowie ihre Ableitungen sind in Tabelle 1 angegeben. Dabei wurden die Absaugeprofile von *H. Schlichting*[2] zugrunde gelegt, die zwischen dem *Blasius*-Profil ($v_0 = 0$) und dem asymptotischen Absaugeprofil interpolieren.

[1] Siehe Fußnote 9 S. 368.
[2] Siehe Fußnote 3 S. 368.

Tabelle 1. *Hilfsfunktionen berechnet aus den Absaugeprofilen von H. Schlichting.*

| $H$ | $f$ | $g$ | $h$ | $\frac{1}{2}f'$ | $\frac{1}{2}g'$ | $\frac{1}{2}h'$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8,0 | —1,60 | 3,19 | 7,0 | 1,15 | 0,7 | 0,500 |
| 2,05 | 8,7 | —1,48 | 3,27 | 7,4 | 1,1 | 0,9 | 0,467 |
| 2,1 | 9,5 | —1,37 | 3,37 | 8,1 | 1,05 | 1,1 | 0,437 |
| 2,15 | 10,3 | —1,27 | 3,49 | 8,9 | 1,05 | 1,3 | 0,409 |
| 2,2 | 11,3 | —1,17 | 3,63 | 10,0 | 1,05 | 1,5 | 0,383 |
| 2,25 | 12,4 | —1,06 | 3,79 | 11,1 | 1,1 | 1,65 | 0,359 |
| 2,3 | 13,6 | —0,95 | 3,96 | 12,2 | 1,1 | 1,75 | 0,337 |
| 2,35 | 14,9 | —0,84 | 4,14 | 13,4 | 1,1 | 1,85 | 0,316 |
| 2,4 | 16,3 | —0,73 | 4,33 | 14,7 | 1,15 | 2,0 | 0,297 |
| 2,45 | 17,8 | —0,61 | 4,54 | 16,2 | 1,25 | 2,25 | 0,279 |
| 2,5 | 19,5 | —0,48 | 4,78 | 18,3 | 1,35 | 2,6 | 0,262 |
| 2,55 | 21,5 | —0,34 | 5,06 | 20,6 | 1,4 | 3,0 | 0,246 |
| 2,6 | 23,7 | —0,20 | 5,38 | 23,0 | 1,45 | 3,35 | 0,231 |
| 2,65 | 26,1 | —0,06 | 5,73 | 25,5 | 1,5 | 3,65 | 0,217 |
| 2,7 | 28,7 | +0,10 | 6,11 | 28,1 | 1,6 | 3,95 | 0,204 |
| 2,75 | 31,7 | 0,27 | 6,52 | 31,0 | 1,75 | 4,25 | 0,192 |
| 2,8 | 34,9 | 0,45 | 6,96 | 34,6 | 2,0 | 4,6 | 0,181 |
| 2,85 | 38,7 | 0,67 | 7,44 | 40,0 | 2,4 | 4,9 | 0,170 |

Die Formeln (19) und (20) gelten natürlich auch für $v_0 = 0$, also für unbeeinflußte Grenzschichten. Jedoch ist dann ein etwas abgeändertes Gleichungssystem[1] geeigneter, das in Nähe des Staupunkts besser konvergiert und für das die Profilfunktionen $f$ und $g$ aus den *Hartree*-Profilen[2] berechnet worden sind.

**3. Stabilitätskriterium.** Gewöhnlich interessiert nun weniger die Weiterentwicklung einer Grenzschicht bei vorgegebener Absaugung an sich, sondern die praktische Frage, wie weit der Widerstand eines Körpers durch Laminarhaltung der Grenzschicht durch Absaugen überhaupt verringert werden kann. Nach *J. Pretsch*[3] wird der Reibungswiderstand, auch bei Einbeziehung der Absaugeleistung dann ein Minimum, wenn die örtliche Absaugegeschwindigkeit überall so bemessen wird, daß das laminare Geschwindigkeitsprofil der Gefahr des Umschlags in die turbulente Form noch gerade widersteht. Die geringste dazu erforderliche Absaugung ist dann von Fall zu Fall erst zu berechnen. Zu den bisherigen Unbekannten $re$ und $H$ tritt also noch eine dritte — nämlich $v_0(s)$ — hinzu, zu deren Berechnung neben Impuls- und Energiegleichung als dritte Gleichung eine Stabilitätsbedingung benötigt wird.

Ein Kriterium zur Bestimmung des wirklichen laminar-turbulenten Umschlagpunktes ist zwar noch nicht bekannt. Statt dessen rechnet man gewöhnlich mit dem berechenbaren Indifferenzpunkt, d.h. mit dem Punkt, bis zu dem die laminare Grenzschicht gegen jede kleine Störung stabil ist, und der noch stromaufwärts vor dem eigentlichen Umschlagpunkt liegt. Das Stabilitätskriterium hierfür läßt sich für einparametrige Geschwindigkeitsprofile in der Form $(U\delta_1/\nu)_{\text{krit.}} =$ örtliche, kritische *Reynolds*-Zahl der Verdrängungsdicke abhängig von irgendeinem Profilparameter angeben. Für das vorliegende Verfahren, bei dem die Grenzschicht durch $re$ und $H$ charakterisiert wird, ist es praktischer

$$re_{\text{krit.}} = \left(\frac{U\delta_2}{\nu}\right)_{\text{krit.}} \tag{21}$$

als Funktion des Parameters $H$ aufzufassen.

In dieser Art sind die veröffentlichten Ergebnisse für verschiedene Profilklassen in Abb. 1 aufgetragen. Die vollen Kreise gelten nach *J. Pretsch*[4,5,6] für *Hartree*-Profile (z.B. ebenes Staupunktprofil $H = 2{,}22$; rotationssymmetrisches Staupunktprofil $H = 2{,}33$; Plattenströmung $H = 2{,}59$). Die Punkte für diese Grenzschichten an undurchlässigen Wänden liegen offenbar mit guter Annäherung auf einer Geraden, der eine Gleichung

$$re_{\text{krit.}} = e^{a - b\,H} \tag{22}$$

[1] *K. Wieghardt*, Aero. Quart. V (1954), S. 25.
[2] *D. R. Hartree*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 33, Part II (1937), S. 223.
[3] Siehe Fußnote 4 von S. 368.
[4] *J. Pretsch*, Jahrb. d. deutschen Luftfahrtforschung I (1941), S. 58.
[5] *J. Pretsch*, Jahrb. d. deutschen Luftfahrtforschung I (1942), S. 54.
[6] *J. Pretsch*, Luftfahrtforschung 18 (1941), S. 341.

Größen geschrieben lauten

$$\frac{dH}{d\sigma} = -f(H)\,\frac{1}{U/U_0}\,\frac{d(U/U_0)}{d\sigma} - g(H)\,\frac{U}{U_0}\,\frac{Re}{re^2} + h(H)\,\frac{Re}{re}\,\frac{v_0}{U_0}\,, \tag{11}$$

$$\frac{d\,re}{d\sigma} = -\left\{\frac{H+1}{(U/U_0)}\,\frac{d(U/U_0)}{d\sigma} + \frac{1}{(r_0/R)}\,\frac{d(r_0/R)}{d\sigma}\right\} re + \varepsilon\,\frac{U}{U_0}\,\frac{Re}{re} + Re\,\frac{v_0}{U_0}\,. \tag{12}$$

Darin bedeuten $R$ eine charakteristische Länge, z. B. der größte Radius des Drehkörpers, $\sigma = s/R$ die dimensionslose Bogenlänge vom Staupunkt aus gemessen, $U_0$ die Anströmgeschwindigkeit und

$$Re = \frac{U_0 R}{\nu}\,; \tag{13}$$

$f$, $g$ und $h$ sind Funktionen des Profilparameters $H$, die für die zugrunde gelegte Profilklasse einmal berechnet werden müssen:

$$\left.\begin{aligned} f(H) &= -\frac{H_{32}\,(H-1)}{N}\,, \\ g(H) &= -\frac{2\,D - \varepsilon\,H_{32}}{N}\,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$h(H) = -\frac{H_{32}-1}{N} \tag{15}$$

und

$$N = \frac{dH_{32}}{dH}\,. \tag{16}$$

Zur schrittweisen Integration des Systems (11) und (12) denken wir uns, ähnlich wie in[1] alle auftretenden Funktionen der Bogenlänge über das jeweilige Intervall linearisiert. Die Schrittlänge $\Delta s$ von der Bogenlänge $s_1$ bis $s_2$ muß so klein gewählt werden, daß alle Funktionen in diesem Intervall genügend genau durch Geradenstücke angenähert werden können. Dann lassen sich Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzen, wie z. B. in

$$\gamma = \frac{1}{U}\,\frac{dU}{ds}\,\Delta s \approx \frac{U_2 - U_1}{\frac{1}{2}\,(U_1 + U_2)} \tag{17}$$

und

$$\omega = \frac{1}{r_0}\,\frac{dr_0}{ds}\,\Delta s \approx \frac{(r_0)_2 - (r_0)_1}{\frac{1}{2}\,[(r_0)_1 + (r_0)_2]}\,. \tag{18}$$

Für die gesuchten Zuwächse von $\Delta re$ und $\Delta H$ ergibt sich dann

$$\Delta re = \frac{-\{(H+1)\,\gamma + \omega\}\,re_1 + \varepsilon\,\dfrac{\bar{U}}{U_0}\,\dfrac{Re}{re_1}\,\Delta\sigma + \dfrac{\bar{v}_0}{U_0}\,Re\,\Delta\sigma}{1 + (H+1)\,\gamma + \omega - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\bar{v}_0}{U_0}\,\dfrac{Re}{re_1}\,\Delta\sigma} \tag{19}$$

und

$$\Delta H = \frac{-f\,\gamma - g\,\dfrac{\bar{U}}{U_0}\,\dfrac{Re}{\bar{re}^2}\,\Delta\sigma + h\,\dfrac{Re}{\bar{re}}\,\dfrac{\bar{v}_0}{U_0}\,\Delta\sigma}{1 + \dfrac{1}{2}\,\dot{f}\,\gamma + \dfrac{1}{2}\,\dot{g}\,\dfrac{\bar{U}}{U_0}\,\dfrac{Re}{\bar{re}^2}\,\Delta\sigma - \dfrac{1}{2}\,\dot{h}\,\dfrac{Re}{\bar{re}}\,\dfrac{\bar{v}_0}{U_0}\,\Delta\sigma}\,. \tag{20}$$

Der Querstrich über $U$, $v_0$ und $re$ bedeutet Mittelbildung im Intervall also z. B. $\bar{U} = \frac{1}{2}\,(U_1 + U_2)$. Der Punkt bezeichnet Differentiation nach $H$, z. B. $\dot{f} = df(H)/dH$. Die Funktionen $f$, $g$ und $h$ sowie ihre Ableitungen sind in Tabelle 1 angegeben. Dabei wurden die Absaugeprofile von *H. Schlichting*[2] zugrunde gelegt, die zwischen dem *Blasius*-Profil ($v_0 = 0$) und dem asymptotischen Absaugeprofil interpolieren.

[1] Siehe Fußnote 9 S. 368.
[2] Siehe Fußnote 3 S. 368.

Tabelle 1. *Hilfsfunktionen berechnet aus den Absaugeprofilen von H. Schlichting.*

| $H$ | $f$ | $g$ | $h$ | $\frac{1}{2}f'$ | $\frac{1}{2}g'$ | $\frac{1}{2}h'$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8.0 | —1.60 | 3.19 | 7.0 | 1.15 | 0.7 | 0.500 |
| 2.05 | 8.7 | —1.48 | 3.27 | 7.4 | 1.1 | 0.9 | 0.467 |
| 2.1 | 9.5 | —1.37 | 3.37 | 8.1 | 1.05 | 1.1 | 0.437 |
| 2.15 | 10.3 | —1.27 | 3.49 | 8.9 | 1.05 | 1.3 | 0.409 |
| 2.2 | 11.3 | —1.17 | 3.63 | 10.0 | 1.05 | 1.5 | 0.383 |
| 2.25 | 12.4 | —1.06 | 3.79 | 11.1 | 1.1 | 1.65 | 0.359 |
| 2.3 | 13.6 | —0.95 | 3.96 | 12.2 | 1.1 | 1.75 | 0.337 |
| 2.35 | 14.9 | —0.84 | 4.14 | 13.4 | 1.1 | 1.85 | 0.316 |
| 2.4 | 16.3 | —0.73 | 4.33 | 14.7 | 1.15 | 2.0 | 0.297 |
| 2.45 | 17.8 | —0.61 | 4.54 | 16.2 | 1.25 | 2.25 | 0.279 |
| 2.5 | 19.5 | —0.48 | 4.78 | 18.3 | 1.35 | 2.6 | 0.262 |
| 2.55 | 21.5 | —0.34 | 5.06 | 20.6 | 1.4 | 3.0 | 0.246 |
| 2.6 | 23.7 | —0.20 | 5.38 | 23.0 | 1.45 | 3.35 | 0.231 |
| 2.65 | 26.1 | —0.06 | 5.73 | 25.5 | 1.5 | 3.65 | 0.217 |
| 2.7 | 28.7 | 0.10 | 6.11 | 28.1 | 1.6 | 3.95 | 0.204 |
| 2.75 | 31.7 | 0.27 | 6.52 | 31.0 | 1.75 | 4.25 | 0.192 |
| 2.8 | 34.9 | 0.45 | 6.96 | 34.6 | 2.0 | 4.6 | 0.181 |
| 2.85 | 38.7 | 0.67 | 7.44 | 40.0 | 2.4 | 4.9 | 0.170 |

Die Formeln (19) und (20) gelten natürlich auch für $v_0 = 0$, also für unbeeinflußte Grenzschichten. Jedoch ist dann ein etwas abgeändertes Gleichungssystem[1] geeigneter, das in Nähe des Staupunkts besser konvergiert und für das die Profilfunktionen $f$ und $g$ aus den *Hartree*-Profilen[2] berechnet worden sind.

**3. Stabilitätskriterium.** Gewöhnlich interessiert nun weniger die Weiterentwicklung einer Grenzschicht bei vorgegebener Absaugung an sich, sondern die praktische Frage, wie weit der Widerstand eines Körpers durch Laminarhaltung der Grenzschicht durch Absaugen überhaupt verringert werden kann. Nach *J. Pretsch*[3] wird der Reibungswiderstand, auch bei Einbeziehung der Absaugeleistung dann ein Minimum, wenn die örtliche Absaugegeschwindigkeit überall so bemessen wird, daß das laminare Geschwindigkeitsprofil der Gefahr des Umschlags in die turbulente Form noch gerade widersteht. Die geringste dazu erforderliche Absaugung ist dann von Fall zu Fall erst zu berechnen. Zu den bisherigen Unbekannten $re$ und $H$ tritt also noch eine dritte — nämlich $v_0(s)$ — hinzu, zu deren Berechnung neben Impuls- und Energiegleichung als dritte Gleichung eine Stabilitätsbedingung benötigt wird.

Ein Kriterium zur Bestimmung des wirklichen laminar-turbulenten Umschlagpunktes ist zwar noch nicht bekannt. Statt dessen rechnet man gewöhnlich mit dem berechenbaren Indifferenzpunkt, d.h. mit dem Punkt, bis zu dem die laminare Grenzschicht gegen jede kleine Störung stabil ist, und der noch stromaufwärts vor dem eigentlichen Umschlagpunkt liegt. Das Stabilitätskriterium hierfür läßt sich für einparametrige Geschwindigkeitsprofile in der Form $(U\delta_1/\nu)_{\text{krit.}}$ = örtliche, kritische *Reynolds*-Zahl der Verdrängungsdicke abhängig von irgendeinem Profilparameter angeben. Für das vorliegende Verfahren, bei dem die Grenzschicht durch $re$ und $H$ charakterisiert wird, ist es praktischer

$$re_{\text{krit.}} = \left(\frac{U\delta_2}{\nu}\right)_{\text{krit.}} \tag{21}$$

als Funktion des Parameters $H$ aufzufassen.

In dieser Art sind die veröffentlichten Ergebnisse für verschiedene Profilklassen in Abb. 1 aufgetragen. Die vollen Kreise gelten nach *J. Pretsch*[4–6] für *Hartree*-Profile (z.B. ebenes Staupunktprofil $H = 2{,}22$; rotationssymmetrisches Staupunktprofil $H = 2{,}33$; Plattenströmung $H = 2{,}59$). Die Punkte für diese Grenzschichten an undurchlässigen Wänden liegen offenbar mit guter Annäherung auf einer Geraden, der eine Gleichung

$$re_{\text{krit.}} = e^{a - bH} \tag{22}$$

[1] *K. Wieghardt*, Aero. Quart. V (1954), S. 25.
[2] *D. R. Hartree*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 33, Part II (1937), S. 223.
[3] Siehe Fußnote 4 von S. 368.
[4] *J. Pretsch*, Jahrb. d. deutschen Luftfahrtforschung I (1941), S. 58.
[5] *J. Pretsch*, Jahrb. d. deutschen Luftfahrtforschung I (1942), S. 54.
[6] *J. Pretsch*, Luftfahrtforschung 18 (1941), S. 341.

entspricht, mit

$$a = 26{,}3 \quad \text{und} \quad b = 8\,. \tag{23}$$

Auch die kritische *Re*-Zahl für das asymptotische Absaugeprofil[1]

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{v_0\, y/\nu}, \qquad v_0 < 0\,, \qquad H = 2 \tag{24}$$

liegt noch in Nähe dieses Gesetzes.

Etwas höhere *re*-Werte für gleiche *H*-Werte markieren die leeren Kreise, die Ergebnisse von *H. Schlichting* und *A. Ulrich*[2] auch ohne Absaugung wiedergeben; sie gelten für $P_6$-Profile, d.h. für Geschwindigkeitsprofile, die aus gewissen Polynomen sechsten Grades bestehen. Etwa für $2{,}3 < H < 2{,}7$ ergibt sich in Abb. 1 wieder eine Gerade mit den Konstanten

$$a = 29{,}1 \quad \text{und} \quad b = 9\,. \tag{25}$$

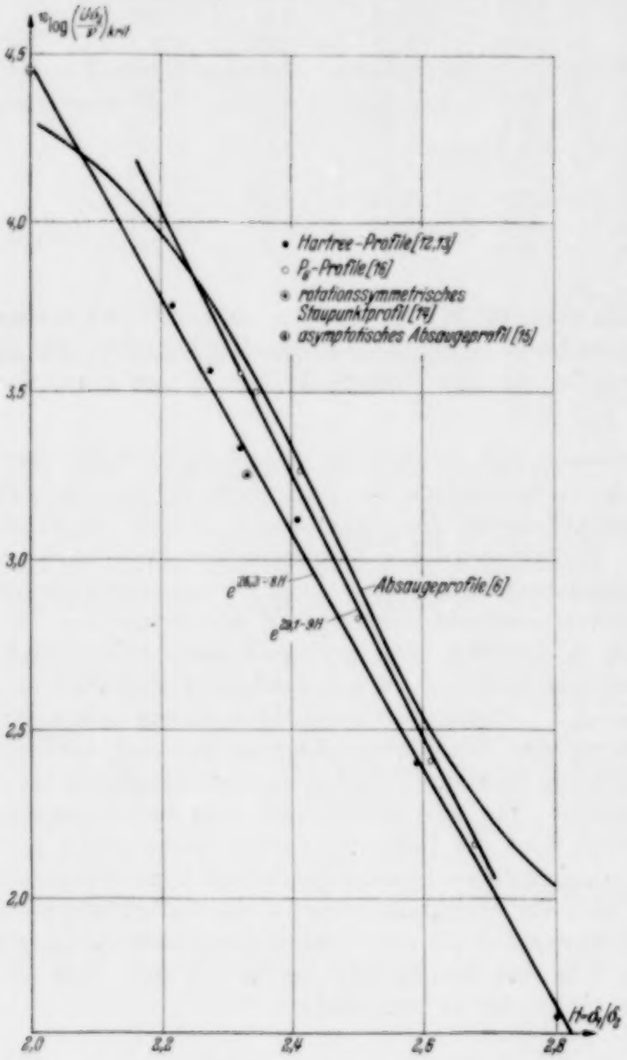


Abb. 1. Stabilitätskriterium für verschiedene Profilklassen.

Für die hier benutzten Absaugeprofile nach *H. Schlichting* schließlich haben *D. L. Burrows*, *A. L. Braslow* und *N. Tetervin*[3] die Stabilitätsrechnung durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abb. 1 durch die eingezeichnete Kurve dargestellt. Auch diese Kurve wird im praktisch interessierenden Bereich von $2{,}2 < H < 2{,}6$ durch die Gerade (22) mit den Konstanten (25) genau genug angenähert. Diese Konstanten werden daher der weiteren Rechnung zugrunde gelegt.

Die Ergebnisse von Stabilitätsrechnungen an ebenen Grenzschichten lassen sich nach *J. Pretsch*[4] ohne weiteres auf den rotationssymmetrischen Fall übertragen, solange die Grenzschichtdicke klein gegenüber dem Körperradius bleibt. Daher kann das obige Kriterium auch auf Drehkörper angewandt werden.

**4. Optimales Absaugen.** Die Grenzschichtrechnung für den Optimalfall der Absaugung kann nun folgendermaßen durchgeführt werden. Zunächst wird vom Staupunkt an, wo die Grenzschicht auch ohne Absaugung noch laminar ist, nach einem der üblichen Verfahren gerechnet. Vom Indifferenzpunkt an, wo bei undurchlässiger Wand die Gefahr des Turbulentwerdens beginnt, wird Absaugung angenommen, und zwar gerade so stark, daß überall stromabwärts das Kriterium (22) erfüllt ist.

Führt man dazu diese Gleichung (22) als starre Bedingung in die Impuls- und Energiegleichung (5) und (6) ein, so kann man jetzt *re* und $v_0(s)$ eliminieren, um eine Gleichung allein für *H* zu erhalten:

$$\frac{dH}{d\sigma} = -\frac{f_1(H)}{U}\frac{dU}{d\sigma} + \frac{f_2(H)}{r_0}\frac{dr_0}{d\sigma} - f_3(H)\,\frac{U}{U_0}\,\frac{Re}{re^2} \;:\; (re = e^{a-bH})\,. \tag{26}$$

[1] *J. Pretsch*, Jahrb. d. deutschen Luftfahrtforschung I (1942) S. 1.
[2] *H. Schlichting* und *A. Ulrich*, Jahrb. d. deutschen Luftforschung I (1942), S. 8.
[3] Siehe Fußnote 6 von S. 368.
[4] Siehe Fußnote 6 von S. 371.

Daraus folgt wieder durch Linearisieren für kleine Schrittlängen die Rechenformel

$$\Delta H = \frac{-f_1\gamma + f_2\omega - f_3\dfrac{Re}{re_1^2}\dfrac{\bar{U}}{U_0}\Delta\sigma}{1+\dfrac{1}{2}f_1\gamma - \dfrac{1}{2}f_2\omega + \left(\dfrac{1}{2}f_3 + bf_3\right)\dfrac{Re}{re_1^2}\dfrac{\bar{U}}{U_0}\Delta\sigma}\cdot \tag{27}$$

Nachdem so $H(\sigma)$ und damit auch $re(\sigma)$ berechnet sind, folgt die örtliche Absaugegeschwindigkeit aus dem Impulssatz

$$\frac{v_0}{U_0} = \frac{1}{Re}\frac{dre}{d\sigma} + \left(\frac{H+1}{U}\frac{dU}{d\sigma} + \frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\sigma}\right)\frac{re}{Re} - \frac{U}{U_0}\frac{\varepsilon}{re}\,. \tag{28}$$

Die Hilfsfunktionen $f_1$, $f_2$ und $f_3$ hängen dabei von $H$ wie folgt ab:

$$f_1(H) = -\frac{H+1-2H_{32}}{N^*}\,, \tag{29}$$

$$f_2(H) = \frac{1-H_{32}}{N^*}\,, \tag{30}$$

$$f_3(H) = \frac{\varepsilon - 2D}{N^*} \tag{31}$$

mit

$$N^* = b(1-H_{32}) + \frac{dH_{32}}{dH}\,. \tag{32}$$

Für die benutzten Absaugeprofile und die Konstante $b=9$ aus (25) erhält man Funktionen, die sich für $2<H<2{,}8$ genau genug durch lineare Ausdrücke annähern lassen, nämlich durch

$$f_1 \approx -0{,}0121 + 0{,}2745\,(H-2{,}2)\,, \tag{33}$$

$$f_2 \approx \quad 0{,}1210 + 0{,}0033\,(H-2{,}2)\,, \tag{34}$$

$$f_3 \approx \quad 0{,}0385\,(H-2)\,. \tag{35}$$

Damit sind alle Formeln zur schrittweisen Berechnung der Absauge-Grenzschicht mit Hilfe des Rechenschiebers zusammengestellt.

**5. Anwendungsbeispiele.** a) Plattenströmung. Die Grenzschicht an einer längs angeströmten Platte (also bei konstanter Außengeschwindigkeit $U$) mit optimaler Absaugung ist 1943 von *J. Pretsch*[1] berechnet worden. Seine Lösung kann jetzt zur Kontrolle benutzt werden.

Bei dieser einfachsten ebenen Strömung kann man die Gleichung (26) direkt integrieren; denn sie lautet hier

$$re^2\frac{dH}{ds} = -f_3\frac{U_0}{\nu}\,. \tag{36}$$

Mit

$$f_3 = c(H-2) \tag{35}$$

und

$$re = e^{a-bH} \tag{22}$$

wird daher

$$Re(s) - Re(s_0) = -c\,e^{-2a}\int_{H_0}^{H}\frac{e^{-2bH}}{H-2}\,dH \quad ; \quad \left(Re(s) = \frac{U_0 s}{\nu}\right). \tag{37}$$

Der Index 0 bezieht sich auf den Indifferenzpunkt, wo die Absaugung beginnt. Nachdem so ermittelt worden ist, wie der Parameter $H$ mit wachsender Lauflänge $Re(s)$ abnimmt, kann das zugehörige $v_0/U_0$ aus Gl. (28) berechnet werden, die sich hier vereinfacht zu

$$\frac{v_0}{U_0} = \frac{bf_3 - \varepsilon}{re}\,. \tag{38}$$

Das Ergebnis ist in derselben Weise wie bei *J. Pretsch*, nämlich $-v_0/U_0$ über $\sqrt{Re(s)}$, in Abb. 2 aufgetragen. Rechnet man mit den Konstanten $a=26{,}3$ und $b=8$ für das Stabili-

[1] Siehe Fußnote 4 von S 368.

tätskriterium, so wird $-v_0/U_0$ überall zu groß. Das ist aber nach Abb. 1 auch verständlich: die Gerade mit diesen $a$- und $b$-Werten liegt deutlich tiefer als die Indifferenzkurve für die Abbsaugeprofile. Um diese unnötig scharfe Stabilitätsbedingung zu erfüllen, muß eben stärker abgesaugt werden, als eigentlich erforderlich.

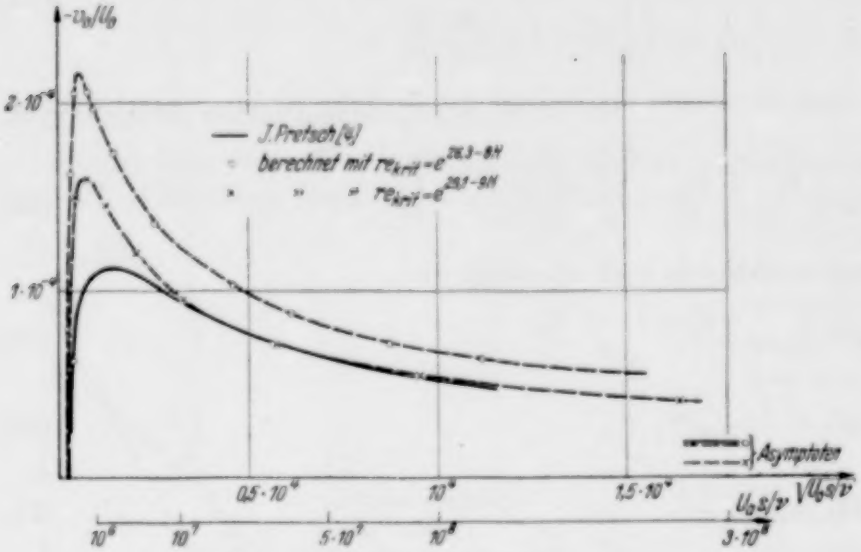


Abb. 2. Optimales Absaugen an der Platte.

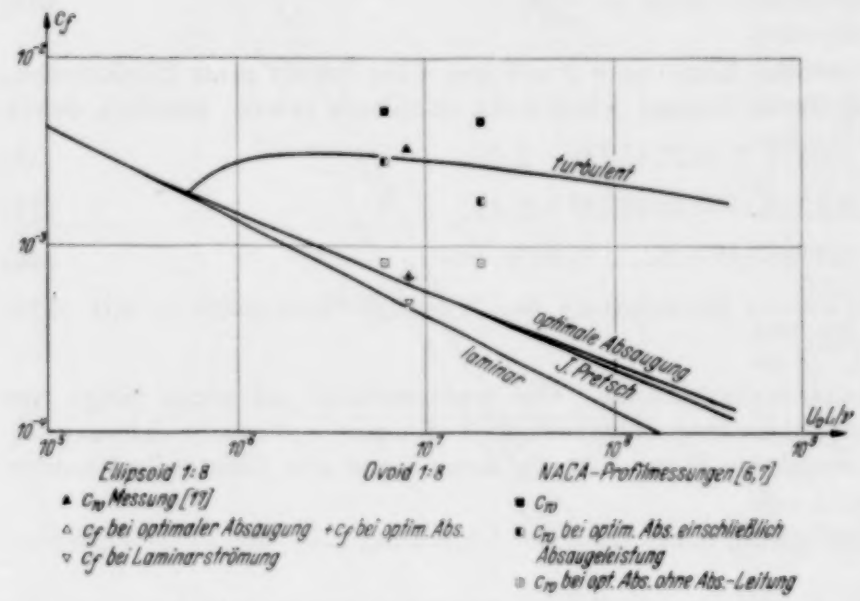


Abb. 3. Vergleich mit Plattenwiderstand.

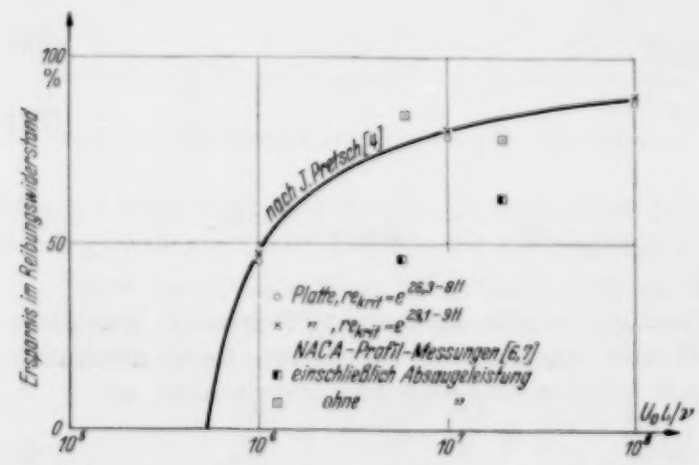


Abb. 4. Ersparnis im Reibungswiderstand der Platte bei optimaler Absaugung.

Auch das andere Konstantenpaar ($a=29{,}1$ und $b=9$) gibt aus dem gleichen Grund noch zu große Absaugegeschwindigkeiten, doch sind die Unterschiede im gezeichneten Bereich — jedenfalls für $Re(s)>10^7$ — bedeutungslos. Andererseits wird hier die asymptotische Absaugegeschwindigkeit für $Re(s)\to\infty$ wesentlich zu klein, im Gegensatz zur Rechnung mit $a=26{,}3$ und $b=8$. Auch das ist nach Abb. 1 erklärlich, da die obere Näherungsgerade für $H\to 2$ wesentlich über den Wert $(re)_{krit.}$ für das asymptotische Absaugeprofil hinausschießt, während die andere Gerade ganz gut dorthin trifft.

Der Beiwert für den Reibungswiderstand der ganzen Platte ergibt sich aus

$$c_f=\frac{1}{Re}\int_0^{Re}\frac{\tau_0}{\frac{\varrho}{2}U^2}\,dRe$$

$$=\frac{1}{Re}\int_0^{Re}\frac{2\,\varepsilon(H)}{re}\,dRe\,. \qquad (39)$$

Wenn sich auch in den Absaugegeschwindigkeiten gewisse Unterschiede gegenüber der Lösung von *J. Pretsch* ergeben haben, so stimmen diese $c_f$-Werte und damit die rechnerischen Ersparnisse im Widerstand durch Laminarhalten durch Absaugen gut überein (s. Abb. 3 und 4).

b) Rotationsellipsoid 1:8. Nachdem sich das Verfahren im vorigen Beispiel als brauchbar erwiesen hatte, wurde es auf ein Rotationsellipsoid angewandt. Das Längenverhältnis größter Durchmesser/Gesamtlänge ist $2R/L=1:8$.

Als $Re$-Zahl wurde gewählt:

bezogen auf den größten Radius

$$U_0R/\nu=5\cdot 10^5,$$

bezogen auf die Gesamtlänge $L$

$$U_0L/\nu=8\cdot 10^6.$$

Die günstigsten Absaugegeschwindigkeiten sind in Abb. 5 aufgetragen. Vom Indifferenzpunkt der unbeeinflußten Grenzschicht am Kopf an bis etwa $^3/_4$ der Länge ist $v_0/U_0$ praktisch

konstant, und zwar

$$\frac{r_0}{U_0} = -1{,}4 \cdot 10^{-4}. \tag{40}$$

Für das hinterste Ende jedoch schreibt die Rechnung örtlich sehr starkes Absaugen vor, wenn man auch dort nicht nur Ablösung sondern auch turbulentes Umschlagen der Reibungsschicht vermeiden wollte.

In die Berechnung des Absaugebeiwertes $c_Q$ geht bei Drehkörpern auch die Körperform ein. Wird bis zu einer Lauflänge $x$ längs der Achse abgesaugt, so ist der Mengenbeiwert wie folgt zu definieren:

$$c_Q = \frac{Q}{FU_0} = \frac{2\pi R^2}{F} \int_0^{x/R} \frac{r_0}{R} \frac{v_0}{U_0} d\frac{s}{R} \tag{41}$$

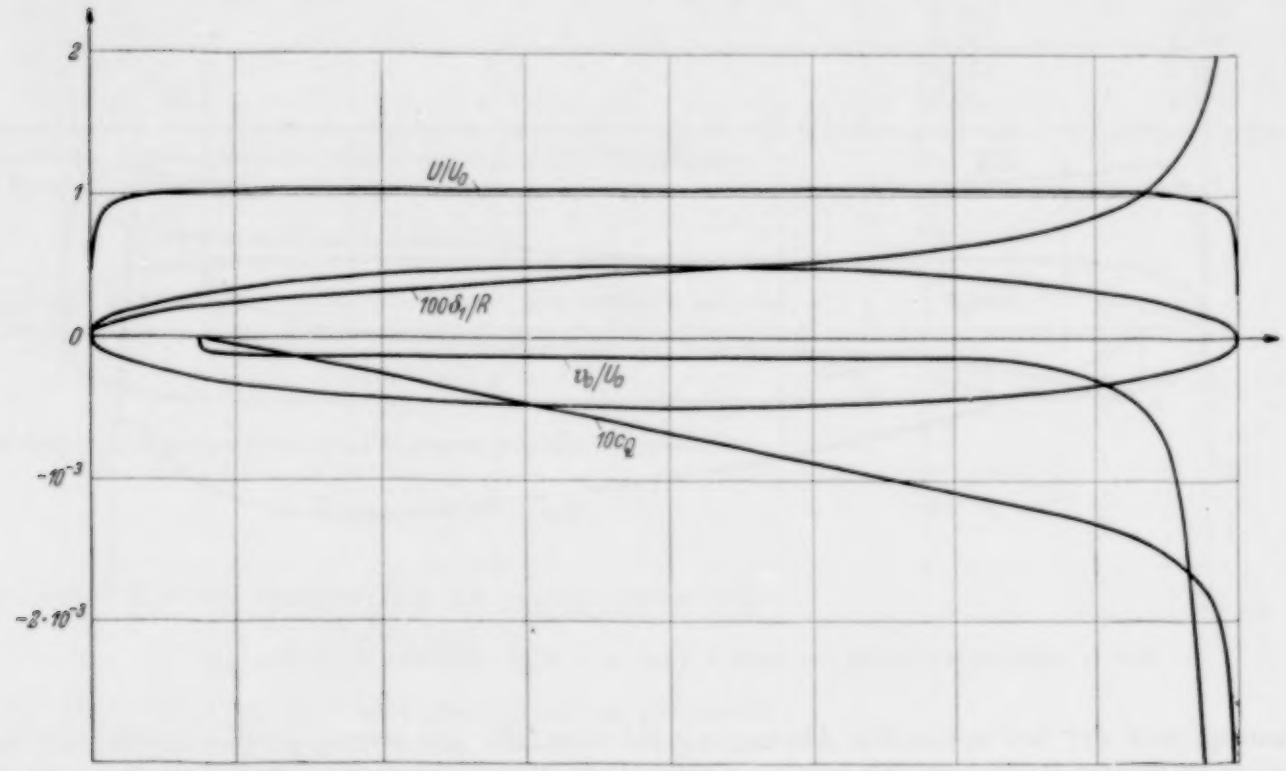


Abb. 5. Optimale Absaugung am Ellipsoid 1:8 bei $Re = U_0 R/\nu = 5 \cdot 10^4$; $U_0 L/\nu = 8 \cdot 10^4$.

mit $Q$ = in der Zeiteinheit abgesaugtes Flüssigkeitsvolumen, und $F$ = gesamte Oberfläche des Ellipsoids. Für das Seitenverhältnis $L/2R = 8$ wird

$$F = 2\pi R^2 \frac{L}{2R}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2} + \arcsin \varepsilon/\varepsilon\right) = 79{,}51\, R^2 \tag{42}$$

mit

$$\varepsilon = \text{Exzentrizität} = \sqrt{1 - (2R/L)^2}. \tag{43}$$

Der in Abb.5 gezeichnete Verlauf von $c_Q$ längs der Achse zeigt, daß die Absaugemenge erst später als die Absaugegeschwindigkeit stark anwächst.

Praktisch ist ein derart starkes Absaugen am hintersten Körperende natürlich undurchführbar; bei Drehkörpern wird man ja dort die bis dahin abgesaugte Flüssigkeit wieder nach hinten ausblasen müssen. Man muß also sowieso das Turbulentwerden und Ablösen der Grenzschicht dort zulassen. Zur Berechnung des Reibungswiderstandes des ganzen Körpers

$$c_f = \frac{1}{\frac{\varrho}{2} U_0^2 F} \int_0^L 2\pi r_0 \tau_0 \, dx = \frac{4\pi}{F/R^2} \int_0^{L/R} \frac{\varepsilon}{re} \frac{r_0}{R} \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 d\frac{x}{R} \tag{44}$$

ist aber der Anstieg der Wandschubspannung auf diesem letzten kurzen Teilstück bedeutungslos. Wesentlich könnte nur der Formwiderstand sein, d.h. der Druckwiderstand, der sich daraus ergibt, daß am Heck der potentialtheoretische Druckrückgewinn (mit einem Stau-

punkt auf der Achse) sich nicht einstellt, sondern statt dessen ein Nachlauf. Bei langen, schlanken Drehkörpern ohne Grenzschichtbeeinflussung ist dieser Formwiderstand jedoch klein gegenüber dem Reibungswiderstand. Der gemessene Gesamtwiderstand solcher Körper bezogen auf die Körperoberfläche erweist sich nämlich als nur wenig größer als der bezogene turbulente Widerstand einer gleich langen ebenen Platte. Man wird daher nur einen kleinen Fehler machen, wenn man auch bei laminar gehaltener Grenzschicht annimmt, daß der Gesamtwiderstand fast dem berechenbaren Reibungswiderstand gleichzusetzen ist. Allerdings würde hier schon ein kleiner Formwiderstand mehr ins Gewicht fallen als bei natürlicher, turbulenter Strömung.

In Abb. 3 wird nun der auf die Oberfläche bezogene Beiwert des Reibungswiderstands des Ellipsoids verglichen mit dem der ebenen Platte. Der von *H. Amtsberg*[1] gemessene Beiwert des Gesamtwiderstands ohne Absaugen liegt nur wenig über dem der turbulenten Platten-

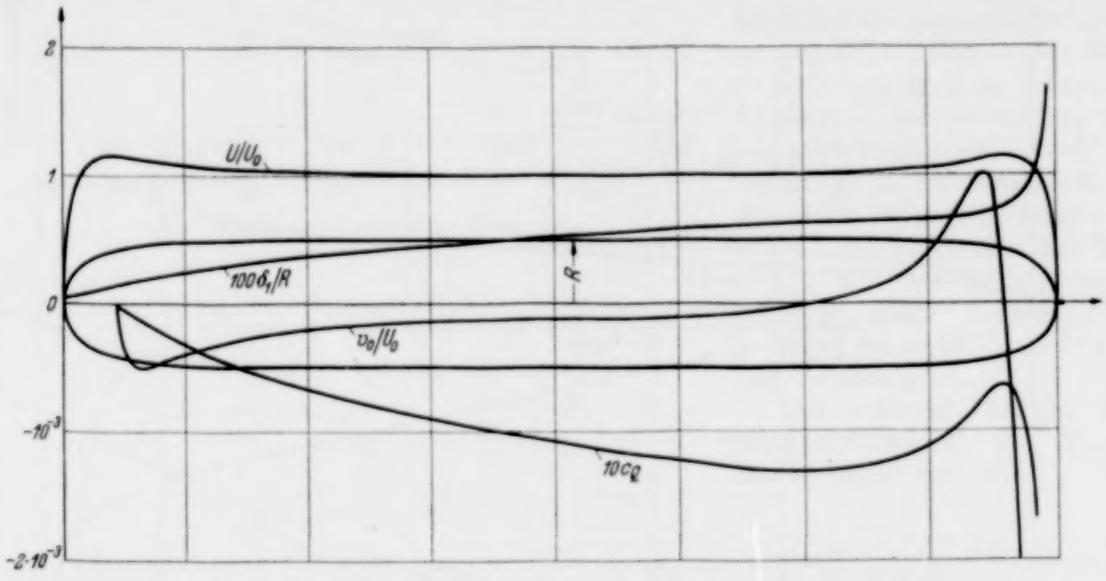


Abb. 6. Optimale Absaugung am Ovoid 1:8 bei $Re = U_0 R/\nu = 5 \cdot 10^5$; $U_0 L/\nu = 8 \cdot 10^6$.

strömung, und der bei optimaler Absaugung ist ebenfalls nur wenig größer als für die entsprechende Plattenströmung. Ebenso verhalten sich die rechnerischen Beiwerte für unbeeinflußte, aber trotzdem laminar gebliebene Grenzschichtströmungen an Ellipsoid und Platte.

Diese Ergebnisse für das Ellipsoid 1:8 berechtigen wohl zu der sowieso plausiblen Verallgemeinerung, daß bei schlanken Umdrehungskörpern, deren Widerstand fast ausschließlich aus Reibungswiderstand besteht, durch Laminarhalten der Grenzschicht durch Absaugung Widerstandsgewinne von derselben Größenordnung wie für die ebene Platte (s. Abb. 3 und 4) möglich sein müßten.

c) Ovoid (Quell-Senken-Körper) 1:8. Als letztes Beispiel wurde noch das Ovoid 1:8 für die gleiche *Re*-Zahl $U_0 R/\nu = 5 \cdot 10^5$, bzw. $U_0 L/\nu = 8 \cdot 10^6$ berechnet. Die Potentialströmung wurde durch Annahme einer punktförmigen Quelle und gleichstarker Senke bestimmt.

Die Außengeschwindigkeit $U$ steigt hier nicht wie beim Ellipsoid monoton bis zur Körpermitte an, sondern hat ein Maximum in Nähe der Körperenden. Demzufolge ergibt sich für die optimale Absaugegeschwindigkeit kein so ausgeglichener Verlauf wie beim Ellipsoid, und im letzten Viertel des Körpers schreibt die Rechnung teilweise sogar Ausblasen statt Absaugen vor (Abb. 6). Das rührt davon her, daß das Stabilitätskriterium (22) als starre Bedingung eingeführt worden ist und nun automatisch überall erfüllt wird. Dort, wo (potentialtheoretisch) ein stabilisierender Druckabfall — also Ansteigen von $U$ — vorhanden ist, wäre die laminare Grenzschicht ohne Ausblasen stabiler als erforderlich, um das turbulente Umschlagen zu vermeiden; die Grenzschicht wäre dann unnötig dünn und die Wandschubspannung somit überflüssig groß. Sowie die Geschwindigkeit $U$ jedoch wieder abnimmt, wird das starke Absaugen in Hecknähe wie beim Ellipsoid gefordert.

[1] *H. Amtsberg*, Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellschaft 38 (1937), S. 177.

**Trotz des unterschiedlichen Verlaufs der Absauge- bzw. Ausblasgeschwindigkeit längs des Körpers ist der Beiwert des gesamten Reibungswiderstands wieder fast derselbe wie beim Ellipsoid, wenn man diesen auf die hier größere Oberfläche bezieht (vgl. Abb. 3 und Tabelle 2).**

Tabelle 2. *Rechenergebnisse für zwei Drehkörper bei* $U_0 L/\nu = 8 \cdot 10^6$.

| | Rotationsellipsoid | *Rankinesches* Ovoid (Quell-Senken-Körper) |
|---|---|---|
| Länge/Durchmesser $L/2\,R$ | 8 | 8 |
| Oberfläche $F$ | $79{,}5\ R^2$ | $96{,}5\ R^2$ |
| Volumen $V$ | $33{,}5\ R^3$ | $45{,}5\ R^3$ |
| Meridianfläche $M$ (größte Wasserlinienfläche) | $25{,}1\ R^2$ | $30{,}1\ R^2$ |
| Querschnittsfläche $\otimes$ (Hauptspant) | $3{,}14\,R^2$ | $3{,}14\,R^2$ |
| $\varkappa = M/2\,R\,L$ | 0,785 | 0,942 |
| $\beta = \otimes/(2\,R)^2$ | 0,785 | 0,785 |
| $\delta = V/(2\,R)^2\,L$ | 0,524 | 0,711 |
| $\eta = V/\otimes\,L = \delta/\beta$ | 0,667 | 0,906 |
| Turbulenter Gesamtwiderstand bezogen auf die Oberfläche (Messung Amtsberg) $W/\frac{\varrho}{2}U_0^2\,F$ | $3{,}32 \cdot 10^{-3}$ | — |
| Reibungswiderstand bei optimaler Absaugung bezogen auf die Oberfläche $W_{r\,\mathrm{Abs.}}/\frac{\varrho}{2}U_0^2\,F$ | $0{,}67_8 \cdot 10^{-3}$ | $0{,}68_4 \cdot 10^{-3}$ |
| Laminarer Reibungswiderstand bezogen auf die Oberfläche $W_{r\,\mathrm{lam.}}/\frac{\varrho}{2}U_0^2\,F$ | $0{,}51_2 \cdot 10^{-3}$ | |
| Turbulenter Gesamtwiderstand bezogen auf den Querschnitt $W/\frac{\varrho}{2}U_0^2\otimes$ | $84{,}0 \cdot 10^{-3}$ | — |
| Reibungswiderstand bei optimaler Absaugung bezogen auf den Querschnitt $W_{r\,\mathrm{Abs.}}/\frac{\varrho}{2}U_0^2\otimes$ | $17{,}1 \cdot 10^{-3}$ | $21{,}0 \cdot 10^{-3}$ |

**6. Zusammenfassung.** Es wird ein verhältnismäßig einfaches Verfahren zur Berechnung von ebenen und drehsymmetrischen laminaren Grenzschichten mit Absaugung oder Ausblasung beschrieben. Besonders geeignet ist es zur direkten Bestimmung des optimalen Falles, wenn überall am Körper so abgesaugt werden soll, daß die laminare Grenzschicht gerade noch stabil ist.

(Eingegangen am 19. November 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr. K. *Wieghardt*, Hamburg 1, Berliner Tor 21.

# Zur Thermodynamik des Überschall-Geradstoßdiffusors.

Von E. Sänger.

**1. Problemstellung.** Der Diffusor übernimmt beim Überschallflug die Rolle der Luftschraube im Unterschallflug als eigentlich treibendes Organ.

Die freifahrende Luftschraube verlor ihre Anwendungsmöglichkeit praktisch bei Flug-*Mach*zahlen über etwa 0,7. Die ummantelte Luftschraube wird in ihren mannigfaltigen Formen, z.B. als Kompressor der Turbinentriebwerke und Turbinenstaustrahltriebwerke noch bis zu Flug-*Mach*zahlen von etwa 2 anwendbar, wobei jedoch ein wesentlicher Teil des Schubes schon nicht mehr an der Schraube, sondern an der als Diffusor wirkenden Ummantelung übertragen wird.

Bei weiterer Steigerung der Flug-*Mach*zahl verschwindet die Schraube völlig aus den Luftstrahltriebwerken und diese degenerieren zum Staustrahltriebwerk, wobei der Diffusor allein den Triebwerksschub erzeugt.

Unter den verschiedenen Formen der Überschall-Diffusoren als Lufteinläufe für Überschalltriebwerke scheint bisher hauptsächlich der Überschall-Geradstoßdiffusor praktische Bedeutung zu erlangen, mit dem in den Jahren 1941—44 die ersten Unterschall-Flugschleppversuche mit Überschall-Staustrahltriebwerken[1,2] in Hinblick auf die spätere Entwicklung von Überschall-Staustrahl-Verkehrsflugzeugen[3] ausgeführt wurden.

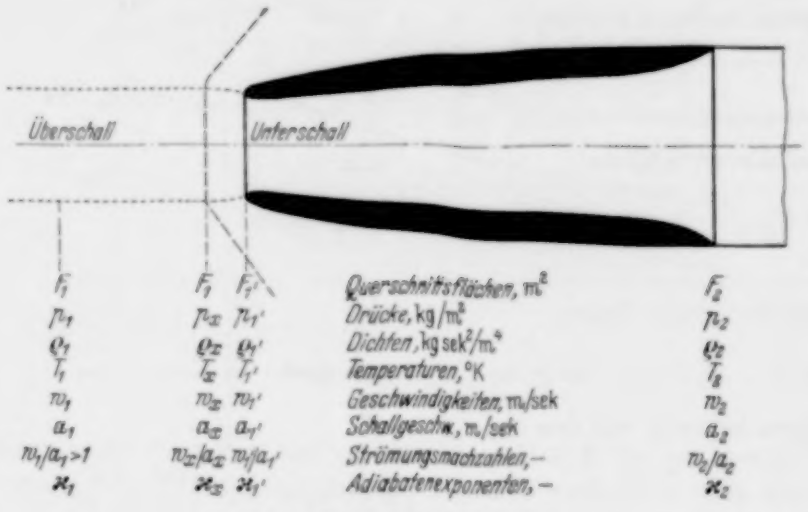


Abb. 1. Überschall-Geradstoßdiffusor.

Die grundsätzlichen Überlegungen, die zu dieser damals noch sehr ungewöhnlich erscheinenden Diffusorform führten, begegnen inzwischen steigendem Interesse, auch für andere Strahltriebwerksarten, und sind deshalb in der vorliegenden Arbeit zusammengestellt worden, zu den Grundlagen einer quantitativen, thermodynamischen Theorie des Überschall-Geradstoßdiffusors.

Abb. 1 zeigt eine Ausführungsform desselben mit einigen Kennzeichnungen der Innenströmung und der verwendeten Formelzeichen.

Die Überschallströmung wird in einem vor dem Diffusormund $F_{1'}$ liegenden senkrechten Verdichtungsstoß in $F_1$ in Unterschallströmung verwandelt und der Diffusor selbst daher mit Unterschallgeschwindigkeit angeströmt und durchströmt. Hinter dem Strömungsquerschnitt $F_2$ folgen meist Kompressoren, Aufheizung der Luft usw., die uns hier nicht interessieren.

Ebenso soll die Außenumströmung des Diffusors hier unerörtert bleiben, d.h. es wird nur die Wirkung der innerhalb des Einströmzylinders $F_1$ fließenden Luft betrachtet. Nur soweit die Schuberzeugung durch diese Innendurchströmung in einigen Fällen auch die Außenumströmung berührt, wird diese mit in den Kreis der Betrachtungen gezogen.

Die Besonderheit des Überschall-Geradstoßdiffusors, daß er nach dem vorne liegenden Verdichtungsstoß schließlich mit Unterschallgeschwindigkeit wie die bekannten *Rudens*chen Fangdiffusoren angeströmt wird, hat zur Folge, daß sich, ähnlich wie bei diesen, der Luftdurchsatz bis zu gewissem Grad, trotz fester Bauquerschnitte, an die Betriebsbedingungen anpassen kann. Die Grenzen dieser automatischen Regelfähigkeit werden untersucht.

---

[1] *E. Sänger* u. *I. Bredt*, Deutsche Luftfahrtforschung UM 3509, Ainring 1943. — NACA, T. M. 1106, Washington 1947.

[2] *I. Sänger-Bredt*, VDI-Forschungsheft 437, Düsseldorf 1953.

[3] *E. Sänger*, Z. Weltluftfahrt, 1 (1949), S. 167.

Während die Luftschraubentheorie im wesentlichen mit den Gesetzen inkompressibler Strömung, also der Aerodynamik, auskommt und nur in beschränktem Umfang zu den Gesetzen der kompressiblen Strömungen, also der Gasdynamik, greift, wird die Theorie der Überschalldiffusoren auch die Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen und unter Umständen sogar der chemischen Zusammensetzung der Luft beachten müssen, also die Gesetze der Thermodynamik bzw. der Thermochemie verwenden.

Die Strömungsuntersuchung erstreckt sich auf drei deutlich getrennte, einzelne Strömungsphasen:

1. den geraden Verdichtungsstoß im Querschnitt $F_1$ mit dem Übergang der mit dem Index (1) bezeichneten Zustandsgrößen in jene mit dem Index ($x$),

2. die isentropische Unterschallanströmung zwischen den Querschnitten $F_1$ und $F_{1'}$, wobei die Zustandsgrößen von ($x$) nach (1′) übergehen, und schließlich

3. die adiabatische Einströmung zwischen den Querschnitten $F_{1'}$ und $F_2$, mit dem Übergang von den Zustandsgrößen des Strömungsmediums von (1′) nach (2).

Die Gleichungen wurden derart bezeichnet, daß jene in thermochemischer Schreibweise nur Nummern führen, jene in thermodynamischer Schreibweise zur Nummer den Zusatzbuchstaben ($a$), jene in gasdynamischer Schreibweise zur Nummer den Zusatzbuchstaben ($b$) führen.

**2. Luft als Strömungsmedium.** Alle Strahltriebwerke arbeiten mit gasförmigen Arbeitsmedien, die aus veränderlichen Gemischen von Photonen, Elektronen, anderen Elementarteilchen, Ionen, Atomen, Radikalen, Molekülen, sogar zusätzlich Staubteilchen oder Flüssigkeitströpfchen bestehen können, und die nicht nur kompressibel sind, sondern während der Strömungsvorgänge chemische und physikalische Veränderungen und Verzögerungen in der Gleichgewichtseinstellung ihrer zahlreichen energetischen Freiheitsgrade aufweisen, endliche freie Weglängen zwischen den Zusammenstößen ihrer Partikel und mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbare Bewegungsgeschwindigkeiten derselben haben können.

Wieweit solche Gase im thermodynamischen Sinn als ideal zu betrachten sind, also der klassischen Zustandsgleichung $pV = RT$ gehorchen, wird daher von Fall zu Fall sehr zu prüfen sein.

Wesentliche Voraussetzungen idealer Gase sind bekanntlich:

1. Die Abmessungen der Gaspartikel sind unendlich klein gegenüber ihren gegenseitigen Abständen. Diese Voraussetzung ist um so besser erfüllt, je geringer die Gasdichte ist.

2. Die Gaspartikel üben aufeinander außerhalb ihrer Zusammenstöße keine Kräfte aus. Diese Voraussetzung ist ebenfalls um so besser erfüllt, je geringer die Gasdichte ist, aber auch, je höher die Gastemperatur ist, da mit wachsender Geschwindigkeit der Partikel die ablenkende Wirkung der Wechselwirkungskräfte immer geringer wird.

Wenn ideale Gase entarten, d.h. statt der *Boltzmann*-Statistik einer andern Statistik gehorchen, tritt an die Stelle der klassischen Zustandsgleichung eine modifizierte Zustandsgleichung. Dies kommt praktisch jedoch bei höheren Temperaturen nur in Photonen- und Elektronengasen vor.

Wenn bei idealen Gasen die Partikelgeschwindigkeiten sich der Lichtgeschwindigkeit nähern, muß die klassische Zustandsgleichung durch eine relativistische Zustandsgleichung ersetzt werden. Dies tritt praktisch jedoch nur bei Photonengasen und bei Elektronengasen sehr hoher Temperatur auf.

Wesentliche Eigenschaften der nichtentarteten, nichtrelativistischen, idealen Gase sind bekanntlich:

1. Sie gehorchen der Zustandsgleichung $pV = RT$.

2. Enthalpie und innere Energie hängen nur von der Temperatur, nicht vom Druck ab, d.h. auch beide spezifischen Wärmen sind nur temperatur- und nicht druck-abhängig, ihre Differenz ist $c_p - c_v = R$.

3. Ihre Partikelgeschwindigkeiten folgen der *Maxwell-Boltzmann*schen Geschwindigkeitsverteilung.

4. Sie erfüllen das *Avogadro*sche Gesetz, wonach im gleichen Volumen immer gleiche Partikelzahlen von jeder Gasart enthalten sind, die Gaskonstante pro Mol ist für alle Gase gleich.

5. Als Folge der Gaszustandsgleichung gilt die *Poisson*sche Adiabatenbeziehung $pV^\varkappa = \text{konst.}$, die allerdings auch temperaturunabhängige spezifische Wärmen voraussetzt. Bei

temperaturveränderlichen spezifischen Wärmen kann man jedoch näherungsweise mit Mittelwerten für die in Frage kommenden Temperaturbereiche rechnen.

Wieweit diese Voraussetzungen und Eigenschaften für technisch verwendete Gase zutreffen, zeigt folgende Aufzählung:

1. Einfache Molekül-, Atom-, Elektronen-, Neutronen-, usw. -Gase mit Anregung der Translations- und gegebenenfalls Rotations-Freiheitsgrade haben konstante spezifische Wärmen und genügen bei geringer Dichte der klassischen Gaszustandsgleichung als Grenzgesetz (praktisch ideale Gase, gasdynamische Strömung).

2. Einfache Molekül- oder Atom-Gase mit zusätzlicher Schwingungs- oder Elektronenanregung haben temperaturabhängige spezifische Wärmen und genügen der Gasgleichung wie unter 1. (sogenannte halbideale Gase, thermodynamische Strömung).

3. Gasgemische, deren Komponenten die Eigenschaften der unter 1. und 2. genannten einfachen Gase haben, und die nicht miteinander reagieren, sind ganz- bzw. halb-ideale Gase (gasdynamische bzw. thermodynamische Strömung).

4. Gasgemische wie 3., deren Komponenten jedoch untereinander chemisch so reagieren, daß die Molekülzahl und damit Molekulargewicht und Gaskonstante erhalten bleiben (z. B. thermisches Wassergasgleichgewicht oder Stickstoff-Verbrennung), haben bekanntlich vom Druck unabhängiges thermisches Dissoziationsgleichgewicht. Bei genügend geringer Dichte gilt für Zustandsänderungen so dissoziierender Gasgemische die Gasgleichung, sie verhalten sich wie halbideale Gase, da die spezifischen Wärmen mit der Veränderung der chemischen Zusammensetzung und der sie begleitenden Wärmetönungen temperaturabhängig sind, selbst wenn die spezifischen Wärmen der Komponenten es nicht sind (thermodynamische Strömung).

5. Einfache Gase und Gasgemische bei hohen Dichten (z. B. im *Van der Waals*chen Bereich) genügen der Gasgleichung nicht (nichtideale Gase). Bei extrem hohen Temperaturen kann sich ein Gas jedoch noch bei der hundertfachen Dichte des Wassers wie ein ideales Gas verhalten, besonders weil die Atomabmessungen durch weitgehende Ionisierung stark vermindert sind.

6. Gemische von im chemischen Gleichgewicht befindlichen, reagierenden Gasen haben im allgemeinen infolge der Veränderlichkeit der Molekülzahl und der Wärmetönungen der Reaktionen druckabhängige spezifische Wärmen und genügen insgesamt der Gasgleichung nicht, während die einzelnen Komponenten des Gemisches die Gasgleichung erfüllen. Die Gaskonstante des Gemisches ist während der Zustandsänderung mit dem Molekulargewicht veränderlich (praktisch nichtideale Gase, thermochemische Strömung).

7. Thermisch ionisierende Gase sind ein Gemisch von Molekül-, Ionen-, Atom-, Elektronen- und meist auch Photonen-Gas (Plasma). Mit dem Molekulargewicht ist die Gaskonstante veränderlich, nach der *Eggert-Saha*-Gleichung sind die spezifischen Wärmen des Gemisches druckabhängig. Ebenso wie dissoziierende Gase sind also auch ionisierende Gase als praktisch nichtideale Gase zu behandeln (Thermoelektrische Strömung, Plasmaströmung).

Die nun hier interessierende atmosphärische Luft bei Flug-*Mach*zahlen bis etwa 10 fällt nur für Flug-*Mach*zahlen bis etwa 2 oder für außerordentlich kurzzeitige Zustandsänderungen, bei denen sich die Trägheit aller inneren Freiheitsgrade gegenüber dem Translationsfreiheitsgrad stark geltend macht, unter den Beispielfall 1. ganz idealer Gase und folgt dann den Gesetzen gasdynamischer Strömung.

Bei langsameren Zustandsänderungen, die die Einstellung thermischer Gleichgewichte erlauben, ist die atmosphärische Luft bis etwa zu Flug-*Mach*zahlen von sechs nach Beispielfall 2. als nur halbideales Gas zu betrachten, folgt also dann den Gesetzen thermodynamischer Strömung.

Bei höheren Flug-*Mach*zahlen und besonders bei geringen Luftdichten gelangt sie ohne weiteres in den Bereich der Fälle 6. und 7. nichtidealer Gase, also thermochemischer bzw. thermoelektrischer Strömung.

Daß zumindest die Einführung halbidealer Gase, also die Ablösung der gasdynamischen durch die thermodynamischen Betrachtungsweisen nicht nur für Feuergasströmungen, sondern bei Flug-*Mach*zahlen über 2 auch schon für die reine Luftströmung nötig ist, zeigt Abb. 2.

Dort sind die wahren und mittleren spezifischen Wärmen und die entsprechenden Isentropenexponenten der Luft mit Berücksichtigung sowohl der nur temperaturabhängigen Freiheitsgrade, wie Molekülschwingung und Elektronentermanregung, als auch der temperatur- und druckabhängigen Freiheitsgrade, wie Dissoziation und Ionisation, zahlenmäßig über der Temperatur aufgetragen, unter der üblichen Annahme unendlich schneller Einstellung aller

inneren Gleichgewichte der Luftmoleküle, und für die druckabhängigen Bereiche für etwa 1 at Druck und für den Druck unendlich.

Gleichzeitig sind die beim Stau der Luftströmung in der Stratosphäre auftretenden Stautemperaturen zu den Flug-*Mach*zahlen eingetragen.

Der normalerweise mit $\varkappa = 1{,}4$ angenommene Adiabatenexponent der Luft kann also nicht nur für sehr rasche Zustandsänderungen, wie sie etwa in Verdichtungsstößen auftreten, bis zu $\varkappa = 1{,}67$ anwachsen, er kann für langsame Zustandsänderungen bei hohen Flug-*Mach*-zahlen ohne weiteres auch bis gegen $\varkappa = 1$ absinken.

Für den Arbeitsprozeß von solchen Überschall-Strahlantrieben, die die Umgebungsluft mitbenützen, sind diese Umstände von grundlegender Bedeutung.

Die herkömmliche Behandlung der thermodynamischen Strömung in Strahltriebwerken mit Hilfe der *Poisson*schen Adiabatengleichung

$$p\,\varrho^{-\varkappa} = \text{konst.} \qquad (1\,b)$$

ist also zweifellos eine sehr rauhe Näherung, da diese Beziehung eigentlich nur für ganzideale Gase, also für druck- und temperaturunabhängige spezifische Wärmen gilt und einen Grenzfall der Gasgleichung für Zustandsänderungen bei konstanter Entropie, $dS = 0$, darstellt.

Demgegenüber haben wir festgestellt, daß sich die Feuergase der Strahlantriebe in der Regel wie nichtideale Gase, die Frischluft bestenfalls wie ein halbideales Gas verhalten.

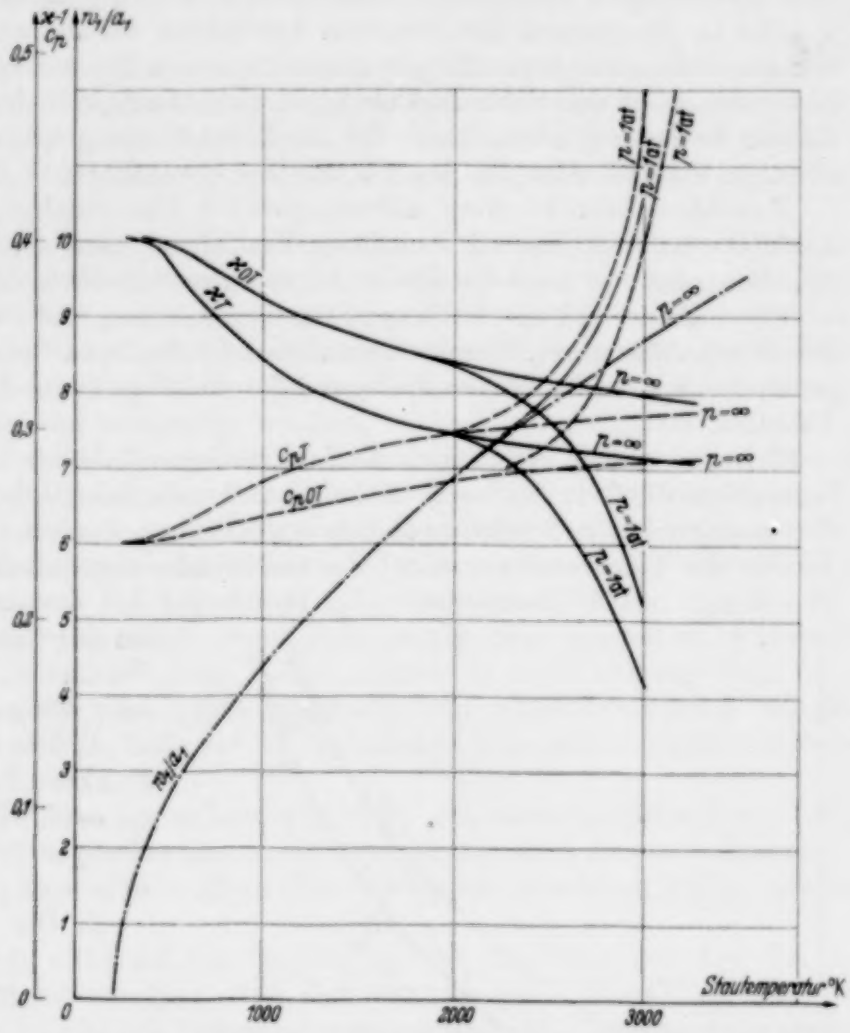


Abb. 2. Wahre und mittlere spezifische Wärmen und Adiabatenexponenten der Luft und Flug-*Mach*zahlen in der Stratosphäre, über der Stautemperatur (bis 2000° K druckunabhängig, darüber für die Drücke 1 at und unendlich).

Beim Vorliegen entsprechender Zustandsdiagramme der Arbeitsmedien, also auch der Luft, in solcher Form, daß die druck- und temperatur-abhängigen $\varkappa$-, $c_p$-, $c_v$- und Molekulargewichts-Werte sowohl die Wärmeaufnahme durch Dissoziation und Ionisation, als auch jene durch molekulare Schwingungsanregung und Elektronenanregung enthalten, kann man für das jeweilige Strömungsmedium kleine Bereiche genügend konstanter $M$ und genügend konstanter $\varkappa$ oder $c_p$, $c_v$ aussondern, dort zulässige Mittelwerte innerhalb des zu erwartenden Druck- und Temperatur-Bereiches wählen und dann die klassische Adiabatenbeziehung sowie die mit ihrer Anwendung hier zu entwickelnden Strömungsbeziehungen benützen, die unter solchen Voraussetzungen also auch für halb- und nichtideale Gase mit zulässiger Näherung gültig sind[1].

Insbesondere lassen sich für den Bereich thermochemischer Strömung an Stelle der Adiabatenexponenten $\varkappa = c_p/c_v$ Isentropenexponenten $\sigma$ und $\tau$ nach den Bestimmungsgleichungen

$$p V^{\sigma} = \text{konst.} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{T}{p^{\frac{\tau-1}{\tau}}} = \text{konst.}$$

für bestimmte Strömungsmedien tabellieren, die die formale Weiterverwendung der *Poisson*schen Gleichung gestatten.

[1] *I. Sänger-Bredt*, Die Rolle des Adiabatenexponenten bei chemisch veränderlichen Gasgemischen (im Erscheinen). Zeitschrift für angew. Mathematik u. Physik, Basel.

Die so erzielte Erweiterung des Anwendungsbereiches der klassischen Strömungsbeziehungen ist deshalb äußerst erwünscht, weil eine genauere analytische Darstellung der Zusammenhänge meist zu nicht expliziten und nicht integrierbaren Beziehungen führt.

Schon die Einführung der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen halbidealer Gase nur mittels der *Planck-Einstein*schen Quantenbeziehung für die Molekülschwingung bringt sofort außerordentlich unhandliche Ausdrücke[1,2]. Die Einführung der Elektronenanregungs- oder gar Dissoziations- und Ionisations-Beziehungen in die Strömungsgleichungen erscheint noch viel umständlicher, so daß die Näherungsrechnung hier noch wesentlichere Vereinfachungen verspricht, wenn man nicht zu graphischen Verfahren übergeht.

Die in geeigneten Mittelwerten benützten Adiabaten- oder Isentropen-Exponenten eines Gasgemisches, in dem alle genannten inneren Freiheitsgrade aktiviert sind, vernachlässigen immerhin noch die Schnelligkeit bzw. Vollständigkeit der Gleichgewichtseinstellung zwischen diesen Freiheitsgraden, über die noch sehr wenig quantitative Kenntnisse vorliegen, und etwaige Kraftwirkungen der Partikel untereinander, z. B. in Plasmen.

Trotzdem erlaubt diese näherungsweise Untersuchung der Strahlantriebe so interessante Einblicke in viele Einzelheiten ihres Verhaltens, und eine so große Übersicht über ihre Eigenschaften, daß sie auch in dieser Arbeit ausschließlich verwendet werden soll.

Die wahren und mittleren spezifischen Wärmen und Adiabatenexponenten unter Ausschluß der druckabhängigen Energieaufnahmen findet man für viele interessierende Gase und Gasgemische, speziell auch für Luft und für die Feuergase der Kohlenwasserstoffverbrennung in Tabellen fertig vor.

Entsprechende, wesentlich umfangreichere Tabellen mit Einschluß von Dissoziation und Ionisation dürften für viele Arbeitsgase und elektrische Plasmen in absehbarer Zeit dank der modernen Großrechenmaschinen verfügbar werden.

Für die Untersuchung einer Zustandsänderung zwischen den Punkten 1 (Temperatur $T_1$, Druck $p_1$) und 2 (Temperatur $T_2$, Druck $p_2$) des Zustandsdiagrammes Abb. 3 benützen wir im allgemeinen dreierlei Werte der spezifischen Wärme $c_p$ bzw. der Adiabatenexponenten $\varkappa$ oder Isentropenexponenten $\sigma$ und $\tau$.

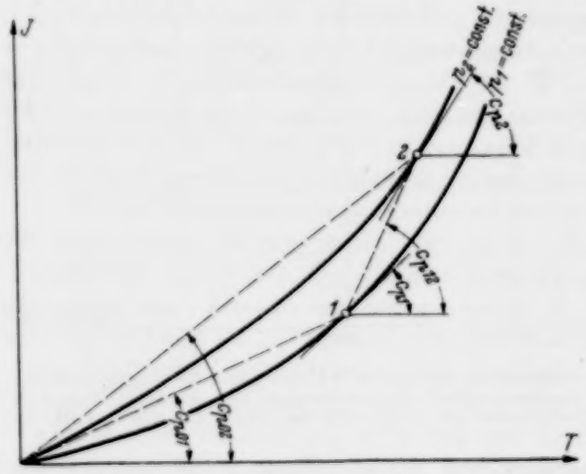

Abb. 3. Im Rechengang benützte spezifische Wärmen der Luft.

1. Die wahre spezifische Wärme in den Punkten 1 und 2, nämlich $c_{p1}=(dJ/dT)_{p1}$ und $c_{p2}=(dJ/dT)_{p2}$ (z. B. zur Festlegung der jeweiligen Schallgeschwindigkeit $a_1^2=\varkappa_1 p_1/\varrho_1$ bzw. $a_1^2=\varkappa_1 g R_1 T_1$.

2. Die mittlere spezifische Wärme

$$J/T=\int_0^T c_p\,dT/T$$

zwischen dem absoluten Nullpunkt der Temperaturskala und den jeweils interessierenden Punkten 1 oder 2, nämlich $c_{p01}$ und $c_{p02}$ (z. B. zur Berechnung der Enthalpien $J_1=c_{p01}T_1$, $J_2=c_{p02}T_2$).

3. Die mittlere spezifische Wärme $c_{p12}=\int_{T_1}^{T_2} c_p\,dT/(T_2-T_1)\sim(c_{p1}+c_{p2})/2$ zwischen den Punkten 1 und 2, näherungsweise als arithmetisches Mittel der wahren spezifischen Wärmen in den Endpunkten der Zustandsänderung (z. B. für Zustandsänderungen zwischen den Punkten 1 und 2).

**3. Der gerade Verdichtungsstoß.** Wenn man einem Gas erhebliche Wärmebeträge zuführt, so stehen dessen Molekülen hauptsächlich die thermischen, chemischen, optischen und elektrischen Freiheitsgrade der Translation, Rotation, Oszillation, Dissoziation, Termanregung und Ionisation zur Aufnahme der Energien zur Verfügung.

Die Größen der dem Molekül zuführbaren Energiequanten wachsen im allgemeinen in der angegebenen Reihenfolge der Freiheitsgrade. Über die Verteilung der gesamten zugeführten

[1] *E. Sänger* u. *I. Bredt*, Deutsche Luftfahrtforschung UM 3509, Ainring 1943, usw.

[2] *E. Sänger* u. *I. Bredt*, Deutsche Luftfahrtforschung UM 3538, Ainring 1944; Bureau of Aeronautics, Navy Dep. Transl. CGB. 32, Washington 1946; — *Ed. R. Cornogg*, Santa Barbara, Calif. 1952.

Energie auf die einzelnen Freiheitsgrade nach dem Einspielen völligen Gleichgewichtes sind wir für technische Zwecke ausreichend im Bilde, insbesondere durch den *Boltzmann*schen Gleichverteilungssatz, durch die *Planck-Einstein*-Funktion der Molekülschwingung, das *Guldberg*sche Massenwirkungsgesetz für chemische Gleichgewichte, die *Maxwell-Boltzmann*sche Geschwindigkeitsverteilungsfunktion für Elektronenanregung, die *Eggert-Saha*-Gleichung für Ionisationsgleichgewichte usw.

Dieser Gleichgewichtszustand, den wir unseren normalen, thermodynamischen Berechnungen meist zugrundelegen, wird aber unter Umständen erst nach vielen Millionen gegenseitiger Molekülstöße erreicht und kann von dem Gaszustand unmittelbar nach der Energiezufuhr ganz erheblich abweichen.

Die Richtung dieser anfänglichen Abweichung vom Gleichgewichtszustand wird auch von der Art der Energiezufuhr abhängen und oft verschieden sein, bei Aufheizung durch Kompression des Gases, durch exotherme chemische Reaktionen im Gas, durch Absorption elektromagnetischer Strahlung oder durch Abbremsung schneller Partikel, wie Elektronen oder Nukleonen usw.

Im Falle einer raschen adiabatischen Kompression im Gas, wie sie beispielsweise durch hochfrequente Schallwellen oder durch Verdichtungsstöße erfolgen kann, wird man oft annehmen dürfen, daß die Zahl der notwendigen Molekülstöße zur Einstellung des thermischen, chemischen, optischen und elektrischen Gleichgewichtes in der Reihenfolge der obengenannten Freiheitsgrade stark anwächst, wobei allerdings die mit geringen Massenträgheiten gekoppelten elektronischen Freiheitsgrade anscheinend bevorzugt werden.

Man hat Gründe, zu glauben, daß der Vorgang des Verdichtungsstoßes selbst sich auf ganz wenige Molekülstöße konzentriert, also ebenso schnell abläuft, wie die Einstellung der *Maxwell-Boltzmann*-Verteilung der Translationsgeschwindigkeiten der Partikel, was bedeuten würde, daß bei dem eigentlichen Stoß, zumindest wenn dieser sehr intensiv ist, keine wesentliche Änderung des Energieinhaltes der inneren Freiheitsgrade von Rotation aufwärts eintritt, und deren Gleichgewichte sich erst wesentlich nach dem Stoß stetig neu einstellen, während zunächst nur der nicht gequantelte, translatorische Freiheitsgrad am Stoß beteiligt ist.

Die Tatsache, daß die Relaxation der Gleichgewichtseinstellung schon bei kurzen Schallwellen gerade erstmalig beobachtet wurde, läßt solche Annahmen besonders wahrscheinlich erscheinen.

In diesem Fall verhält sich das Gas beim eigentlichen Stoß wie ein einatomiges mit $\varkappa = 1{,}67$, beim Durchgang durch den Stoß steigt seine Translationstemperatur gemäß diesem Adiabatenexponenten, während die Temperaturen aller andern Freiheitsgrade zunächst völlig unverändert bleiben.

Die Enthalpiesteigerung der Luft während des Stoßes kommt zunächst nur den Translationsfreiheitsgraden zugute, die Mehrenthalpie wird sich erst nachher allmählich auf die übrigen Freiheitsgrade verteilen, bei sehr hohen Temperaturen vorweg auf Elektronenanregung und Ionisation, weiterhin der Reihe nach auf Rotation — wobei der Adiabatenexponent der Luft von den anfänglichen $\varkappa = 5/3 = 1{,}67$ absinkt auf das übliche $\varkappa = 7/5 = 1{,}40$ — , weiterhin gegebenenfalls auch auf Molekülschwingung — wobei $\varkappa$ weiter absinken kann auf $\varkappa = 9/7 = 1{,}29$ (siehe Abb. 2). Falls die Stoß-*Mach*zahlen ausreichend hoch sind, kann mit der weiteren Einstellung von Dissoziation und Ionisation ins Gleichgewicht der Isentropenexponent noch weiter bis gegen $\varkappa = 1$ sinken.

In den bekannten gasdynamischen Beziehungen des senkrechten Verdichtungsstoßes

$$\frac{w_x}{w_1} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} + \frac{2}{\varkappa + 1}\frac{a_1^2}{w_1^2} = \frac{a_1'^2}{w_1^2}, \tag{2b}$$

$$\frac{p_x}{p_1} = \frac{2\varkappa}{\varkappa + 1}\frac{w_1^2}{a_1^2} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} = \frac{w_1^2/a_1'^2 - \dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}}{1 - \dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\, w_1^2/a_1'^2}, \tag{3b}$$

$$\frac{p_x^0}{p_1} = \frac{p_x}{p_1}\frac{p_x^0}{p_x} = \left(\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1}\, w_1^2/a_1^2 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right)\left(\frac{\dfrac{\varkappa + 1}{2}\, w_1^2/a_1^2}{\dfrac{2\varkappa}{\varkappa + 1}\, w_1^2/a_1^2 - \dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \tag{3'b}$$

$$\frac{\varrho_x}{\varrho_1} = \frac{\varkappa + 1}{2\, a_1^2/w_1^2 + (\varkappa - 1)} = w_1^2/a_1'^2, \tag{4b}$$

$$\frac{T_x}{T_1} = 1 + \frac{2\varkappa(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\left(w_1^2/a_1^2 - 1\right)\left(1 + \frac{1}{\varkappa}\,a_1^2/w_1^2\right) = \frac{1 - \dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,a_1'^2/w_1^2}{1 - \dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,w_1^2/a_1'^2}, \tag{5b}$$

$$\frac{a_x^2}{a_1^2} = \frac{T_x}{T_1}, \tag{6b}$$

$$\frac{w_x^2/a_x^2}{w_1^2/a_1^2} = \frac{(w_x/w_1)^2}{T_x/T_1} = \frac{a_1^2/w_1^2 + \dfrac{\varkappa-1}{2}}{\varkappa\, w_1^2/a_1^2 - \dfrac{\varkappa-1}{2}}, \tag{7b}$$

$$\frac{q_x}{q_1} = \frac{\varrho_x\, w_x^2/2}{\varrho_1\, w_1^2/2} = \frac{w_x}{w_1} \tag{8b}$$

erscheint als Temperatur nur die Translationstemperatur, daher wird die Temperatursteigerung durch den Stoß mit $\varkappa = 1{,}67$ wesentlich größer sein, als aus der üblichen Rechnung mit $\varkappa = 1{,}40$ folgt, und diese überhöhte Temperatur wird erst nach dem Stoß allmählich auf die Gleichgewichtstemperatur absinken. Das nach dem Stoß jedenfalls mit Unterschallgeschwindigkeit strömende Gas wird infolge der nachträglichen Abkühlung auch noch langsamer werden. Diese unmittelbar auf den eigentlichen Stoß folgende, verzögerte Zylinderströmung hat natürlich eine weitere Änderung der Impuls- und Druckverhältnisse nach dem eigentlichen Stoß zur Folge, die in Abb. 4 dargestellt ist.

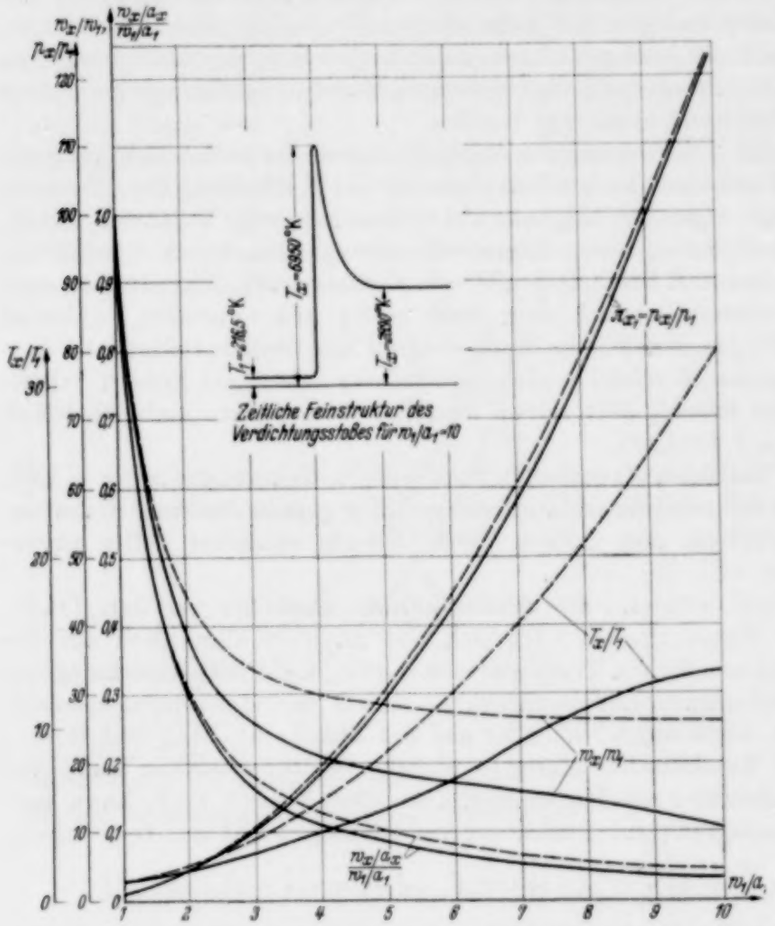


Abb. 4. Luftzustandsgrößen nach dem geraden Verdichtungsstoß, Spitzenwerte (gestrichelt) und Werte nach Einstellung des thermischen Gleichgewichtes (voll).

Für die Berechnung der Gaszustandsgrößen unmittelbar nach dem eigentlichen Stoß lassen sich die Gleichungen (2b) bis (8b) mit $\varkappa = 1{,}67$ verwenden.

Die quantitativen Ergebnisse dieser Rechnung zeigt Abb. 4 für den Flug-*Mach*zahlbereich bis 10 in gestrichelten Linien.

Man sieht, daß z. B. bei der Flug-*Mach*zahl 10 und der Stratosphärentemperatur

$$T_1 = 216{,}5°\ \mathrm{K}$$

die Spitzentemperatur vorübergehend bis auf

$$T_{x'} = 6950°\ \mathrm{K}$$

ansteigt.

Diese starke Energiekonzentration im Translationsfreiheitsgrad des Gases bei vor dem Stoß hohen Überschallgeschwindigkeiten zeigt erfahrungsgemäß die Neigung, sich erst auf die mit nur geringen Massen verbundenen elektronischen Freiheitsgrade der Termanregung und Ionisation, und erst später auf die mit den großen Kernmassen verknüpften, trägeren Freiheitsgrade der Rotation, Oszillation und Dissoziation zu verteilen, und zwar unter guter Einhaltung der *Maxwell-Boltzmann*schen Verteilung der Translationsgeschwindigkeiten, und der zugehörigen Termanregungen und Ionisationsgrade.

Daraus folgt eine der hohen Spitzentemperatur entsprechende, außerordentlich starke Ionisierung und sehr intensives Lumineszenzleuchten, beides wohlbekannte Begleiterscheinungen sehr intensiver Verdichtungsstöße in Luft.

Diese Spitzen der Translationstemperatur erlauben in bekannter Weise[1] die Intensität des Lumineszenzleuchtens beim Stoß und den Grad der zu erwartenden Ionisation abzuschätzen. Der so berechnete Ionisationsgrad bestätigt sich durch Messung des Reflexionsvermögens gegen kurze Funkwellen, das bei intensiveren Verdichtungsstößen jenem massiver Metalle nahekommt, wodurch andererseits auch wieder die hier benützten Rechenvoraussetzungen indirekt bestätigt werden.

In der Gleichung (3'b) war $p_x^0$ der Ruhedruck nach dem Stoß. Da im Grenzfall einer gegen Unendlich anwachsenden Anfangs-*Mach*zahl $w_1/a_1 \to \infty$ die Strömungs-*Mach*zahl $w_x/a_x$ nach dem Stoß gegen den endlichen Wert $(\varkappa - 1)/2\,\varkappa$ geht [siehe (7b)], findet nach dem Stoß noch ein sehr merkbarer isentropischer Stau $(p_x^0/p_x)_{w_1/a_1 \to \infty} = [(\varkappa+1)^2/4\,\varkappa]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$ statt. Dies folgt aus der Tatsache, daß bei $w_1/a_1 \to \infty$ nach (4b) für $\varkappa \neq 1$ die Dichte $\varrho_x$ durchaus endlich bleibt, lediglich der Druck $p_x$ und die Temperatur $T_x$, als auch die Geschwindigkeit $w_x$ werden unendlich groß, damit auch die Schallgeschwindigkeit $a_x$, und dadurch schließlich die *Mach*zahl $w_x/a_x$ gleich Null nur für $\varkappa = 1$.

Für die Berechnung der Gaszustandsgrößen $T_x$, $p_x$, $\varrho_x$ usw. nach dem Stoß und nach Einstellung aller Gleichgewichte, die wir als Ausgangsgrößen für die weitere Strömungsrechnung durch den Diffusor brauchen, muß wegen der geschilderten Veränderlichkeit der $\varkappa$-Werte auf thermodynamische bzw. thermochemische Strömungsbeziehungen zurückgegriffen werden.

Die bekannten Strömungsgrundgleichungen für

Kontinuität: $\varrho_1 w_1 = \varrho_x w_x$ ,

Energie: $\frac{w_1^2}{2g} + c_{p\,01}\,T_1 = \frac{w_x^2}{2g} + c_{p\,0x}\,T_x$ ,

Impuls: $\varrho_1 w_1^2 + p_1 = \varrho_x w_x^2 + p_x$ ,

Zustandsgleichung: $\frac{p_1}{\varrho_1 R_1 T_1} = \frac{p_x}{\varrho_x R_x T_x} = g$

ergeben die den Gleichungen (2b) bis (8b) entsprechenden Lösungen in thermochemischer Schreibweise für praktisch nichtideale Gase, wenn $a_1^2 = \sigma_1 p_1/\varrho_1 = \sigma_1 g R_1 T_1$ ist

$$\frac{w_x}{w_1} = \frac{\frac{1}{\sigma_1} a_1^2/w_1^2 + 1}{\frac{R_x}{c_{p\,0x}} - 2}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\left(1 + \frac{2\,c_{p\,01}}{\sigma_1 R_1}\,a_1^2/w_1^2\right)\left(\frac{R_x}{c_{p\,0x}} - 2\right)\frac{R_x}{c_{p\,0x}}}{\left(\frac{1}{\sigma_1}\,a_1^2/w_1^2 + 1\right)^2}}\right], \tag{2}$$

$$\frac{p_x}{p_1} = \pi_{x\,1} = 1 + \sigma_1 \frac{w_1^2}{a_1^2}\left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\varrho_x}{\varrho_1} = \frac{w_1}{w_x}, \tag{4}$$

$$\frac{T_x}{T_1} = \frac{R_1}{R_x}\frac{w_x}{w_1}\left[1 + \sigma_1 \frac{w_1^2}{a_1^2}\left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right)\right], \tag{5}$$

$$\frac{a_x^2}{a_1^2} = \frac{\sigma_x R_x T_x}{\sigma_1 R_1 T_1}, \tag{6}$$

$$\frac{w_x^2/a_x^2}{w_1^2/a_1^2} = \frac{\sigma_1 R_1 T_1\, w_x^2}{\sigma_x R_x T_x\, w_1^2}, \tag{7}$$

$$\frac{q_x}{q_1} = \frac{w_x}{w_1} \tag{8}$$

---

[1] *E. Sänger*. Interavia, 3 (1948), S. 505; Brennstoffchemie, 32 (1951), S. 37.
*E. Sänger, I. Bredt, P. Goercke*, C. R. Acad. Sc. 230 (1950), S. 949; Z. angew. Math. Phys. 1 (1950), S. 209; NACA, T. M. 1805, 1951; Z. physik. Chem., 199 (1952), S. 46; Ann. Télécomm. 6 (1951), S. 250.
*E. Sänger*, Z. Naturforschg., 5a (1950); S. 467; Z. phys. Chem. 197 (1951), S. 265; Z. Sprengtechnik 1, (1952), S. 47.
*E. Sänger*, Z. Naturforschg. 6a (1951), S. 302; C. R. Acad. Sc. 235 (1952), S. 460; Z. Sprengtechnik 1, (1952), S. 151; Z. Naturforschg. 8a (1953), S. 204; Z. Weltraumfahrt 5 (1954).

bzw. für halbideale Gase, wenn also $R_x = R_1 = c_{px} - c_{vx} = c_{p1} - c_{v1} = c_{p0x} - c_{v0x} = c_{p01} - c_{v01}$ ist, und $\sigma = \tau = \varkappa$

$$\frac{w_x}{w_1} = \frac{\varkappa_{0x}}{\varkappa_{0x} - 1}\left(\frac{1}{\varkappa_1} a_1^2/w_1^2 + 1\right)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\left(1 + \frac{2}{\varkappa_1}\frac{\varkappa_{01}}{\varkappa_{01} - 1} a_1^2/w_1^2\right)\left(\frac{\varkappa_{0x}^2 - 1}{\varkappa_{0x}^2}\right)}{\left(\frac{1}{\varkappa_1} a_1^2/w_1^2 + 1\right)^2}}\right]. \tag{2a}$$

usw.

Verwendet man nun an Stelle des für die Spitzenwerte gebrauchten Adiabatenexponenten der Luft $\varkappa = 1{,}67$ die Werte $\varkappa_1 = \varkappa_{01} = 1{,}40$ und $\varkappa_x$ bzw. $\varkappa_{0x}$ nach Abb. 2, so erhält man den in Abb. 4 voll eingezeichneten Verlauf der Gaszustandsgrößen nach dem Stoß und nach Gleichgewichtseinstellung.

Der zum Teil erhebliche Unterschied der vollen und gestrichelten Kurven zeigt zugleich, daß die Vernachlässigung des wirklichen Luftverhaltens mit veränderlichen spezifischen Wärmen bei höheren Flug-*Mach*zahlen auch keine ganz grobe Näherung mehr darstellen würde, sondern zu völlig falschen Ergebnissen führen kann.

Die kleine Nebenfigur zeigt die zeitliche Feinstruktur des Verdichtungsstoßes hinsichtlich der Temperatur bei der Flug-*Mach*zahl 10 in der Stratosphäre. Während der Stoß selbst eine Temperaturspitze von $T_{x'} = 6950\,°\mathrm{K}$ aufweist, sinkt diese Temperatur nach Einspielen aller Gleichgewichte im Gas auf weniger als die Hälfte, nämlich $T_x = 2890°\,\mathrm{K}$, also etwa auf den Schmelzpunkt von Molybdän. Der Vorgang ist ganz analog den bekannten Verhältnissen im Detonationsstoß.

Durch die Abkühlung sinkt die Strömungsgeschwindigkeit auch im ähnlichen Verhältnis ab, während Druck und Strömungs-*Mach*zahl durch die Gleichgewichtseinstellung weniger berührt werden. Die Energieverluste durch abdiffundierende Elektronen und Photonen aus dem Zustand $T_{x'}$ sind dabei vernachlässigt, die mit diesem Zustand verbundene hohe Ionisation wird als rechtzeitig rückbildbar angenommen.

**4. Isentropische Unterschall-Anströmung.** Bei der isentropischen Unterschall-Anströmung nach dem Verdichtungsstoß zwischen den Querschnitten $F_1$ und dem Einlaufquerschnitt $F_{1'}$ gelten folgende thermochemische Strömungsbeziehungen für

Kontinuität: $$F_1\,\varrho_x\,w_x = F_{1'}\,\varrho_{1'}\,w_{1'}\,,$$

Energie: $$\frac{w_x^2}{2g} + c_{p0x}T_x = \frac{w_{1'}^2}{2g} + c_{p01'}T_{1'}\,,$$

Isentrope: $$\frac{p_x}{p_{1'}} = \left(\frac{\varrho_x}{\varrho_{1'}}\right)^{\sigma_{x1'}},$$

Zustandsgleichung: $$\frac{p_x}{\varrho_x R_x T_x} = \frac{p_{1'}}{\varrho_{1'} R_{1'} T_{1'}} = g\,.$$

Daraus folgt die leider nicht explizite Bestimmungsgleichung für $p_{1'}/p_x$ in thermochemischer Schreibweise zu

$$\frac{F_{1'}}{F_1} = \frac{(p_{1'}/p_x)^{-1/\sigma_{x1'}}}{\sqrt{1 + \frac{2\,c_{p0x}}{\sigma_x R_x}\left(a_x^2/w_x^2\right)\left[1 - \frac{R_x}{R_{1'}}\frac{c_{p01'}}{c_{p0x}}(p_{1'}/p_x)^{\frac{\sigma_{x1'}-1}{\sigma_{x1'}}}\right]}}\,. \tag{9}$$

Mit Hilfe ausreichender Zustandsdiagramme der Luft bis in den thermochemischen Strömungsbereich und der Gleichungen (7), (5) und (2) kann man die Funktion (9) in der Form

$$\frac{p_{1'}}{p_x} = \pi_{1'x}\left(\frac{F_{1'}}{F_1}, \quad \frac{w_1}{a_1}\right) \tag{9'}$$

tabellieren oder in Diagrammform bringen, wie es in Abb. 6 in rudimentärer Form versucht wurde, so daß die Zahlenwerte ohne umständliche Rechnung jederzeit verfügbar sind.

Damit ergeben sich dann die weiteren Zustandsgrößen im Querschnitt $F_{1'}$

$$\frac{w_1}{w_x} = \frac{F_1}{F_{1'}}\left(\frac{p_{1'}}{p_x}\right)^{-1/\sigma_{x1'}}, \tag{10}$$

$$\frac{\varrho_{1'}}{\varrho_x} = \left(\frac{p_{1'}}{p_x}\right)^{1/\sigma_{x1'}}, \tag{11}$$

$$\frac{T_1}{T_x} = \frac{R_x}{R_1}\left(\frac{p_{1'}}{p_x}\right)^{\frac{\sigma_{x1'}-1}{\sigma_{x1'}}}, \tag{12}$$

$$\frac{w_{1'}^2/a_{1'}^2}{w_x^2/a_x^2} = \frac{\sigma_x}{\sigma_{1'}}\left(\frac{F_1}{F_{1'}}\right)^2\left(\frac{p_{1'}}{p_x}\right)^{-\frac{\sigma_{x1'}+1}{\sigma_{x1'}}}; \tag{13}$$

in thermodynamischer Schreibweise für halbideale Gase

$$\frac{F_{1'}}{F_1} = \frac{(p_{1'}/p_x)^{-1/\varkappa_{x1'}}}{\sqrt{1+\frac{2}{\varkappa_x}\frac{\varkappa_{0x}}{\varkappa_{0x}-1}(a_x^2/w_x^2)\left[1-\frac{\varkappa_{01'}}{\varkappa_{0x}}\frac{\varkappa_{0x}-1}{\varkappa_{0x'}-1}(p_{1'}/p_x)^{\frac{\varkappa_{x1'}-1}{\varkappa_{x1'}}}\right]}}}, \tag{9a}$$

in gasdynamischer Schreibweise für ganzideale Gase

$$\frac{F_{1'}}{F_1} = \frac{(p_{1'}/p_x)^{-1/\varkappa}}{\sqrt{1+\frac{2}{\varkappa-1}(a_x^2/w_x^2)\left[1-(p_{1'}/p_x)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}}. \tag{9b}$$

Nach (13) wird in $F_{1'}$ die Schallgeschwindigkeit erreicht, wenn

$$\frac{p_{1'}}{p_x} = \left[\frac{w_x^2}{a_x^2}\frac{\sigma_x}{\sigma_{1'}}\frac{F_1^2}{F_{1'}^2}\right]^{\frac{\sigma_{x1'}}{\sigma_{x1'}+1}} \tag{14}$$

ist, womit wieder alle kritischen Zustandsgrößen in $F_{1'}$ mittels (10) bis (13) folgen.

Insbesondere ergibt sich aus den Gleichungen (14) und (9) eine Beziehung für das bei stationärer Strömung überhaupt größtmögliche $F_1/F_{1'}$ in Abhängigkeit von der Anfangs-*Machzahl* $w_x/a_x$ zu

$$\frac{F_{1'}}{F_1} \geq \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_{1'}}}\frac{w_x}{a_x}\left(\frac{\sigma_{1'}/\sigma_x + 2\,c_{p\,01'}/\sigma_{1'}R_{1'}}{w_x^2/a_x^2 + 2\,c_{p\,0x}/\sigma_x R_x}\right)^{\frac{\sigma_{x1'}+1}{2(\sigma_{x1'}-1)}}. \tag{15}$$

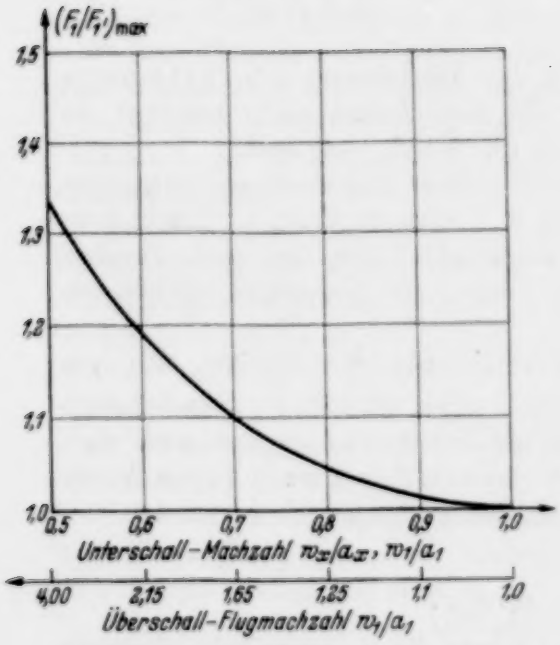


Abb. 5. Größtmögliche Verhältnisse von $F_1/F_{1'}$ über der Unterschall-*Machzahl* $w_x/a_x$ oder $w_1/a_1$ und über der Überschall-Flug-*Machzahl* $w_1$ $a_1$, mit Rücksicht auf das Erreichen der Schallgeschwindigkeit im Einlaufquerschnitt $F_{1'}$

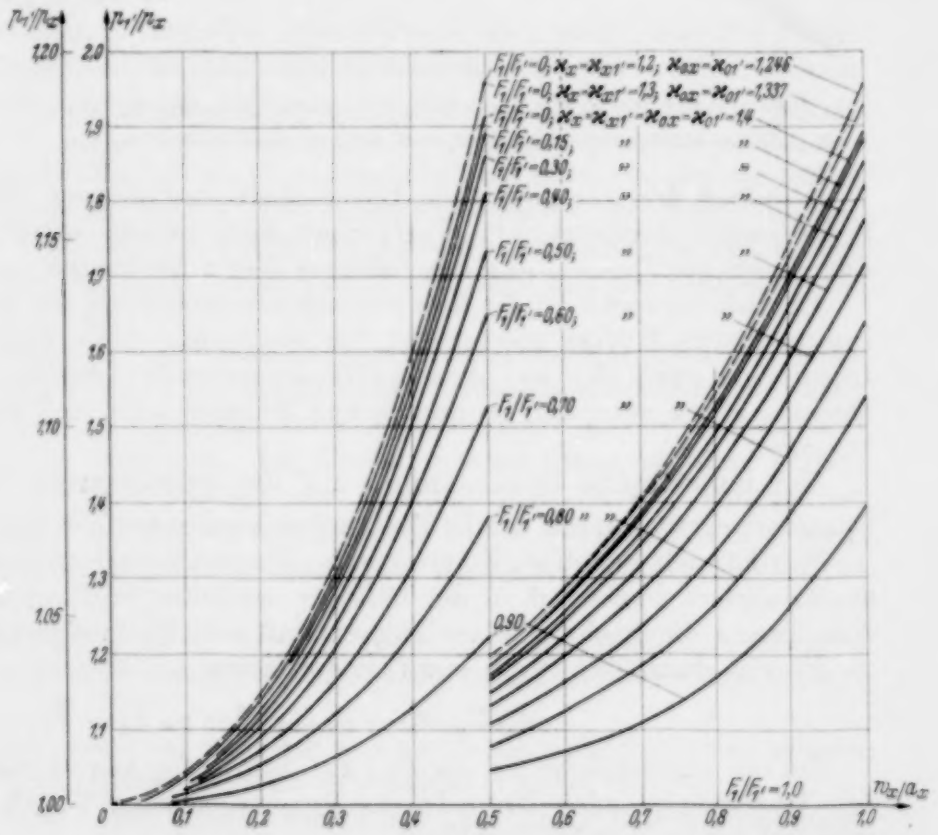


Abb. 6. Druckänderung $\pi_{1',x} = p_{1'}/px$ isentropischer Strömung in Abhängigkeit vom Flächenverhältnis $F_1/F_{1'}$ und der Ausgangs-Machzahl $w_x/a_x$.

In gasdynamischer Schreibweise vereinfacht sich die letzte Beziehung zu

$$\frac{F_1}{F_{1'}} \leq \frac{a_x}{w_x}\left(\frac{2}{\varkappa+1}+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{w_x^2}{a_x^2}\right)^{\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}}. \tag{15b}$$

Bei der Anfangs-*Mach*zahl $w_x/a_x = 1$ wird $F_1/F_{1'}$ also höchstens Eins. Dieser Fall tritt offenbar nur bei der Flug-*Mach*zahl 1 ein. Aber auch schon bei der praktisch sehr wichtigen Anfangs-*Mach*zahl $w_x/a_x = 0{,}8$; entsprechend etwa einer Unterschall-Flug-*Mach*zahl $w_1/a_1 = 0{,}8$ bzw. einer Überschall-Flug-*Mach*zahl 1,25 und dem gesamten dazwischenliegenden Schalldurchgangsgebiet, kann die Eintrittsfläche, wie Abb. 5 zeigt, des Luftzylinders $F_1$ praktisch kaum mehr größer werden, als die gebaute Eintrittsfläche $F_{1'}$ des Diffusors.

In Abb. 6 und 7 sind die Gleichungen (9) und (10) zahlenmäßig dargestellt für den beim Schalldurchgang wichtigen Bereich $F_1/F_{1'} < 1$. Diese Diagramme gelten daher auch für $w_1/a_1 < 1$.

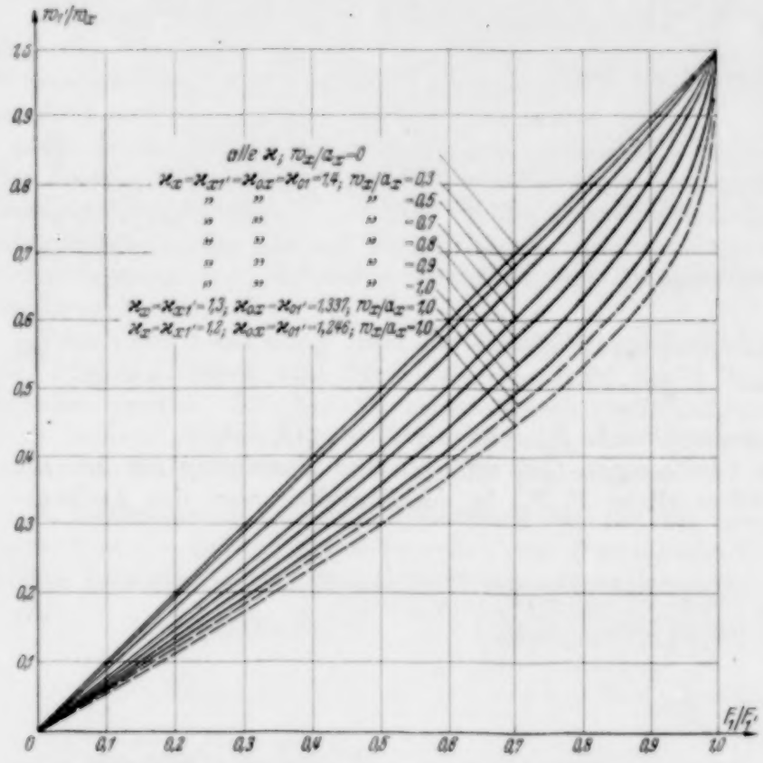


Abb. 7. Geschwindigkeitsänderung $w_{1'}/w_x$ isentroper Strömung in Abhängigkeit vom Flächenverhältnis $F_1/F_{1'}$ und der Ausgangs-*Mach*zahl $w_x/a_x$.

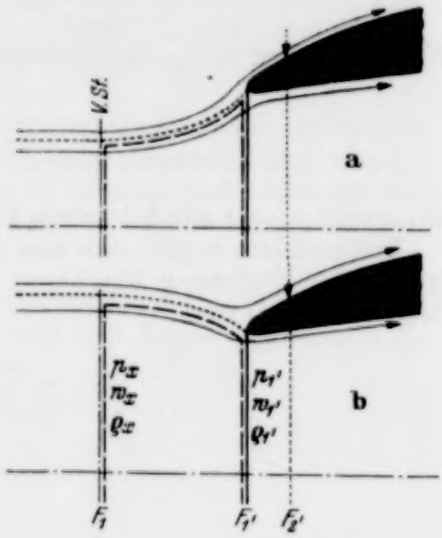


Abb. 8. Isentropische Unterschall-Anströmung.

**5. Schub der isentropischen Unterschall-Anströmung.** Bei der Herleitung der Strömungsbeziehungen isentropischer Unterschall-Anströmung wurde der Impulssatz nicht benützt, so daß dieser zur Berechnung des Schubes dieser Strömung noch zur Verfügung steht.

In Abb. 8a und b ist die hier betrachtete Strömung durch strichliert angedeutete, rotationssymmetrische Käfige abgegrenzt, für die beiden Fälle $F_1/F_{1'} < 1$ und $F_1/F_{1'} > 1$. Nach dem Impulssatz muß der aus dem Käfig austretende Impuls, vermindert um den eintretenden Impuls, gleich sein der geometrischen Summe aller auf die umgrenzte Gasmasse wirkenden Drücke.

Die unbekannte Drucksumme auf die gekrümmten Seitenwände des Käfigs, die aus Symmetriegründen mit der Diffusorachse zusammenfallen muß, wollen wir mit $\bar{P}_{11'}$ bezeichnen.

Wir können uns diese Seitenwände, die von keiner Stromlinie durchsetzt werden, zunächst materialisiert denken, d. h. der Diffusor erscheint in der gezeichneten Form nach vorne durch eine dünne Blechschale so verlängert, daß sein Einlaufquerschnitt genau gleich $F_1$ wird.

Es gilt dann der Impulssatz in der Form

$$\varrho_{1'} F_{1'} w_1^2 - \varrho_x F_x w_x^2 = p_x F_1 + \bar{P}_{11'} - p_{1'} F_{1'}.$$

Da der tatsächliche Schub $P_{11'}$ auf den Käfigmantel jedoch nur die geometrische Summe der Überdrücke oder Unterdrücke gegenüber dem Druck $p_1$ der ungestörten Umgebungsatmosphäre ist, wird weiterhin

$$P_{11'} = \bar{P}_{11'} - p_1 (F_{1'} - F_1) = F_{1'} (p_{1'} - p_1 + \varrho_{1'} w_1^2) - F_1 (p_x - p_1 + \varrho_x w_x^2). \tag{16}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (3), (4), (8), (10), (11) und $p_1/\varrho_1 w_1^2 = (1/\sigma_1)(a_1^2/w_1^2)$ läßt sich diese Gleichung noch in die Form bringen

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_{11'}}{\varrho_1 F_1 w_1^2} &= \frac{1}{\sigma_1}(a_1^2/w_1^2)\left[\frac{F_{1'}}{F_1}(\pi_{1'x}\,\pi_{x1}-1)-(\pi_{x1}-1)\right]+\frac{w_x}{w_1}\left(\frac{w_{1'}}{w_x}-1\right)\\ &= \frac{F_{1'}}{F_1}\left[\frac{1}{\sigma_1}(a_1^2/w_1^2)\left(\frac{p_{1'}}{p_x}-1\right)+\left(1-\frac{w_x}{w_1}\right)\frac{p_{1'}}{p_x}+\left(\frac{F_1}{F_{1'}}\right)^2\left(\frac{p_{1'}}{p_x}\right)^{-1/\sigma_{x1'}}\frac{w_x}{w_1}\right]-1\,,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

die den Schub der isentropischen Anströmung als Funktion nur der vorgegebenen Größen $w_1/a_1$ und $F_1/F_{1'}$ angibt, wenn man für die Werte $w_x/w_1$ bzw. $p_{1'}/p_x$ noch die Beziehungen (2) bzw. (9) benützt.

Für $F_{1'}/F_1 > 1$ wird dieser Schubanteil positiv, im andern Fall negativ. Dieser andere Fall, $F_1/F_{1'} > 1$ ist also nicht nur nach Abb. 5 im Schalldurchgangsbereich nur in sehr beschränktem Umfang realisierbar, er ist auch für die Schuberzeugung ungünstig insofern, als der Hauptschub des Diffusors durch jenen der Anströmung vermindert wird. Wir werden noch erkennen, daß dieser Fall allerdings im höheren Überschallbereich die einzige Regelmöglichkeit offen läßt.

In thermodynamischer Schreibweise lautet (17)

$$\frac{P_{11'}}{\varrho_1 F_1 w_1^2} = \frac{F_{1'}}{F_1}\left[\frac{1}{\varkappa_1}(a_1^2/w_1^2)\left(\frac{p_{1'}}{p_x}-1\right)+\left(1-\frac{w_x}{w_1}\right)\frac{p_{1'}}{p_x}+\left(\frac{F_1}{F_{1'}}\right)^2\left(\frac{p_{1'}}{p_x}\right)^{-1/\varkappa_{x1'}}\frac{w_x}{w_1}\right]-1\,, \tag{17a}$$

wobei für $w_x/w_1$ bzw. $p_{1'}/p_x$ nun (2a) bzw. (9a) zu benützen sind. Schließlich in gasdynamischer Schreibweise etwas ausführlicher nach Einführung von (2b)

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_{11'}}{\varrho_1 F_1 w_1^2} = \frac{F_{1'}}{F_1}&\left[\frac{1}{\varkappa}(a_1^2/w_1^2)\left(\frac{p_{1'}}{p_x}-1\right)+\frac{2}{\varkappa+1}\left(1-(a_1^2/w_1^2)\right)\frac{p_{1'}}{p_x}\right.\\ &\left.+\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}+\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_1^2}{w_1^2}\right)\left(\frac{F_1}{F_{1'}}\right)^2\left(\frac{p_{1'}}{p_x}\right)^{-1/\varkappa}\right]-1\,.\end{aligned}\right\} \tag{17b}$$

Für $F_{1'}/F_1 = 1$ wird der Schub $P_{11'}$ naturgemäß gleich Null.

**6. Regelung des Diffusors.** Bei der Ableitung des Schubes der isentropischen Unterschall-Anströmung war der tatsächliche Diffusor nach vorne durch dünne Blechwände von der Form der Seitenwände des Impulskäfigs verlängert gedacht, auf die sich die Strömung abstützen und den errechneten Schub übertragen kann.

Tatsächlich bestehen diese gedachten, materiellen Zusatzwände aber nicht, und der Schub muß in Wahrheit an den Außenwänden des wirklichen Diffusors übertragen werden, worauf die Möglichkeit beruht, den Überschall-Geradstoßdiffusor bei fester geometrischer Gestalt in gewissem Umfang regeln zu können. Daher muß die außen um den Käfigmantel strömende Luft jene Drücke auf die innen längs des Käfigmantels strömende Luft ausüben, die wir bisher dem materiellen Käfigmantel zugeschrieben hatten. Die Masse des äußeren Luftringes um den Mantel erfährt dadurch eine äußere Kraft, die im Fall *a* von Abb. 8 nach vorne, im Fall *b* nach rückwärts in die allgemeine Strömungsrichtung weist, und deren Lage mit der Diffusorachse zusammenfällt.

Da diese Außenumströmung, abgesehen von Strömungsverlusten, jedoch insgesamt keinerlei axiale äußere Kräfte erfahren kann, muß der ringförmige Strömungskörper im weiteren Strömungsverlauf eine genau so große, entgegengesetzte axiale Kraft durch Drücke der wirklichen Diffusoraußenwände auf ihn erfahren. Im Fall *a* müssen diese offenbar Unterdrücke, im Fall *b* Überdrücke auf die Diffusornase sein, die wirkliche Diffusoraußenwand erfährt im erstern Fall einen Sog nach vorne, im zweiten Fall einen Formwiderstand nach rückwärts, abgesehen von den eigentlichen Luftwiderstandsvorgängen, die uns hier nicht beschäftigen.

Dieser Übertragungsmechanismus des Schubes der isentropischen Unterschall-Anströmung auf die Außenwände des Diffusors setzt natürlich voraus, daß geeignete, derartige Wände überhaupt vorhanden sind.

Wenn der eigentliche Diffusor beispielsweise lediglich aus einem unendlich dünnwandigen, zylindrischen Rohr vom Querschnitt $F_{1'}$ bestünde, wäre dies offenbar nicht der Fall.

Da dann der Schub nur durch Über- oder Unter-Drücke auf die scharfe Kante übertragen werden kann, die physikalisch überhaupt möglichen Über- oder Unterdrücke aber durchaus begrenzt sind, kann man bald eine kleinste Grenzdicke der scharfen Einlaufkante angeben,

unterhalb der der Schub jedenfalls kleiner bleibt, als er zu den vorgegebenen Strömungsverhältnissen infolge der stationären Strömungsmechanik unabänderlich gehört.

Die notwendigen Strömungskräfte können also infolge fehlender, achsparalleler Wanddruckkomponenten nicht hergestellt werden. Da anderseits durch die Vorkehrungen am rückwärtigen Ende des Diffusors jedes $F_1/F_{1'}$, insbesondere jede beliebige Verengung $F_1/F_{1'} < 1$ des Querschnittes $F_1$ erzwungen werden kann, bleibt in diesem Fall als Ausweg nur eine grundsätzlich andere Strömungsform übrig, z. B. Rückströmung eines Teiles der Luftmassen in die Bewegungsrichtung des Diffusors, oder der Übergang zu pulsierender Strömung.

Dabei beginnt die Gassäule mit ihrer Eigenfrequenz zu schwingen und stellt das Impulsgleichgewicht durch nach vorne oder nach rückwärts weglaufende Impulswellen her[1], ohne daß es zu Schub auf den Diffusor kommt, dieser wirkt mehr als Orgelpfeife denn als Triebwerksorgan.

Die physikalischen Grundlagen des Vorganges sind sehr ähnlich denen der bekannten thermischen Verstopfung beheizter Strömung, doch stellt diese Art der Strömungsverstopfung einen viel allgemeineren Fall dar.

Praktisch werden nun die Verhältnisse selten ganz so ungünstig liegen, der Eintrittswulst des Diffusors wird immer eine endliche Dicke $d$ haben, so daß er eine Stirnfläche von der Größe $(F_{2'} - F_{1'})$ den Unter- oder -Über-Drücken darbietet, welch letztere im Grenzfall absoluten Vakuums den höchstmöglichen Sog

$$\frac{S}{\varrho_1 F_1 w_1^2} = \frac{1}{\varkappa} (a_1^2/w_1^2) \frac{F_{1'}}{F_1} \left( \frac{F_{2'}}{F_{1'}} - 1 \right) \tag{18b}$$

beziehungsweise im Grenzfall vollen Aufstaues nach dem Verdichtungsstoß den höchstmöglichen Druckwiderstand

$$\frac{D}{\varrho_1 F_1 w_1^2} = \frac{1}{\varkappa} (a_1^2/w_1^2) \frac{F_{1'}}{F_1} \left( \frac{F_{2'}}{F_{1'}} - 1 \right) \left( \frac{p_\varkappa^0}{p_1} - 1 \right) \tag{19b}$$

übertragen können, wenn man sich hier — angesichts des approximativen Charakters der ganzen Betrachtung — mit gasdynamischer Schreibweise begnügt.

Der nach (17b) tatsächlich zu übertragende Schub der isentropischen Unterschall-Anströmung lautet, bezogen auf die Bedingungen vor dem Stoß und bezogen auf den im Grenzfall auf die Diffusorwände übertragbaren Schub,

$$\frac{P_{11'}}{S} \leq 1 =$$

$$= \frac{(p_{1'}/p_\varkappa - 1) + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1} \left[ (w_1^2/a_1^2 - 1)\, p_{1'}/p_\varkappa + (F_1/F_{1'})^2 \, (p_{1'}/p_\varkappa)^{-1/\varkappa} \left( \frac{\varkappa - 1}{2} w_1^2/a_1^2 + 1 \right) \right] - \varkappa\, w_1^2/a_1^2 \cdot F_1/F_{1'}}{(F_{2'}/F_{1'} - 1)}, \tag{20}$$

für $F_1/F_{1'} < 1$, bzw.

$$\frac{P_{11'}}{D} \leq 1 =$$

$$= \frac{(p_{1'}/p_\varkappa - 1) + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1} \left[ (w_1^2/a_1^2 - 1)\, p_{1'}/p_\varkappa + (F_1/F_{1'})^2 \, (p_{1'}/p_\varkappa)^{-1/\varkappa} \left( \frac{\varkappa - 1}{2} w_1^2/a_1^2 + 1 \right) \right] - \varkappa\, w_1^2/a_1^2 \cdot F_1/F_{1'}}{(F_{2'}/F_{1'} - 1)\,(p_\varkappa^0/p_1 - 1)} \tag{21b}$$

für $F_1/F_{1'} > 1$. Diese beiden Gleichungen geben die Mindestwerte von $(F_{2'}/F_{1'})_{min}$ in Abhängigkeit von $F_1/F_{1'}$ und $w_1/a_1$ an. Abb. 9 zeigt eine numerische Auswertung für $\varkappa = 1{,}4$.

Wir verfolgen die Regelbarkeit des Luftdurchsatzes an einem Diffusor mit der allerdings geringen Nasendicke $d$ von 4,25% des Durchmessers des gebauten Einlaufquerschnittes $F_{1'}$, also mit $F_{2'}/F_{1'} = 1{,}2$, der in den Nebenfiguren der Abb. 9 skizziert ist.

Im inkompressiblen Unterschall-Flug-*Mach*zahlbereich bestehen offenbar praktisch keinerlei Einschränkungen der Regelbarkeit.

Aber schon nach Überschreiten der Flug-*Mach*zahl 0,5 beginnen diese merkbar zu werden, insofern, als bei zu großen $F_1$ der Durchfluß beschränkt wird durch Erreichen der Schallgeschwindigkeit in $F_{1'}$, dagegen bei zu kleinen $F_1$ die notwendige Sogkraft an der Diffusornase

[1] *J. Ackeret* u. *N. Rott*, Schweizer Bauzeitung, 67, (1949), S. 40, 58.

wegen der auf absolutes Vakuum begrenzten Unterdrücke an derselben nicht mehr übertragen werden kann.

Bei Annäherung der Fluggeschwindigkeit an die Schallgeschwindigkeit der ungestörten Atmosphäre ($w_1/a_1 \to 1$) kann schließlich $F_1$ nicht mehr größer als $F_{1'}$ werden, wogegen für kleinere $F_1$ noch ein gewisser, beschränkter Spielraum bleibt.

Nach Überschreiten der Flug-*Mach*zahl 1 öffnet sich der Spielraum für große $F_1$ nach oben wieder rasch, weil der Verdichtungsstoß für genügend tiefe Unterschall-Strömungs-*Mach*zahlen vor dem Diffusoreintritt sorgt, doch stößt man mit zunehmender Flug-*Mach*zahl bald an die Grenze, wo der Staudruck auf die Nasenfläche nicht mehr zur Übertragung des Schubes ausreicht. Dadurch wird für die betrachtete Nasendicke eine Grenze für große $F_1$ schon zu 1,28 $F_{1'}$ gezogen, die weiterhin fast unabhängig von der Flug-*Mach*zahl bleibt, da der Schub der Anströmung ähnlich wie der Staudruck wächst.

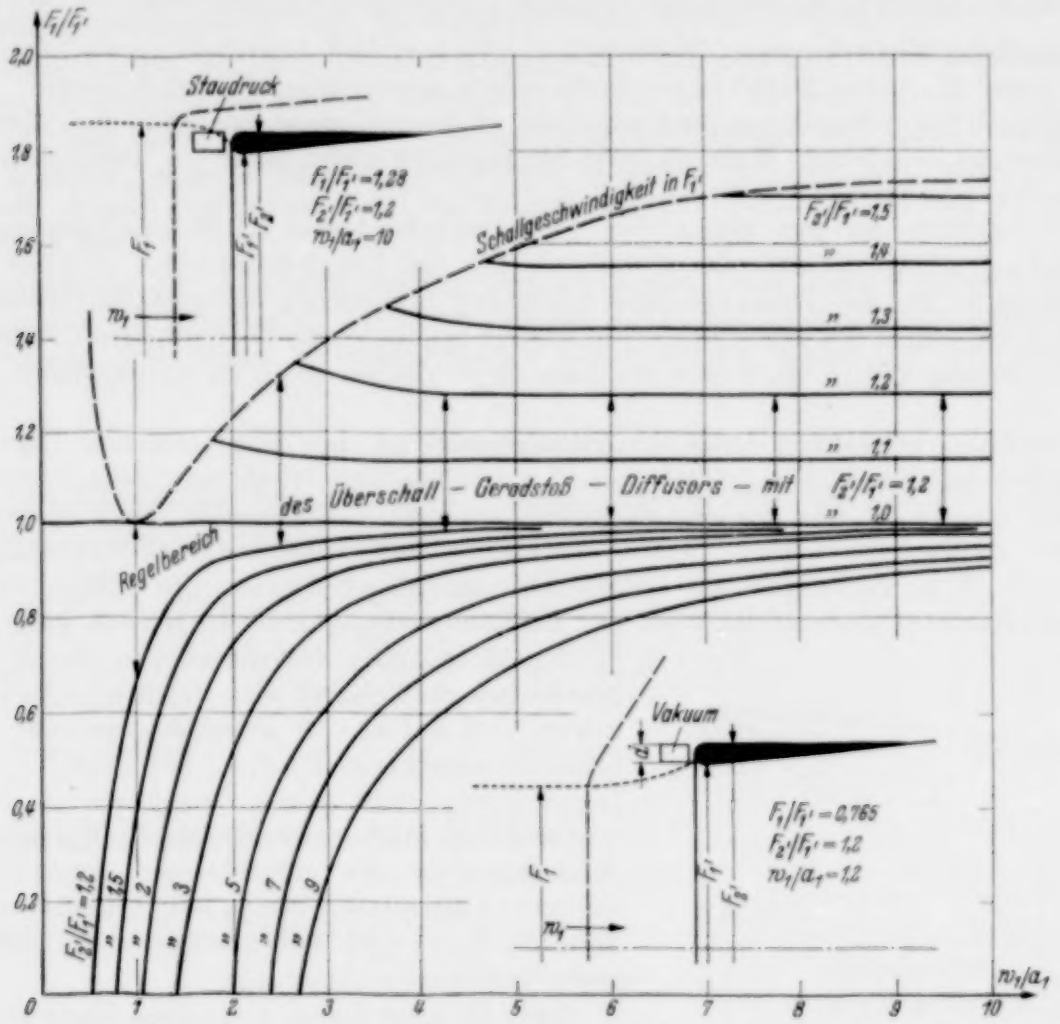


Abb. 9. Maximale Regelbereiche des Überschall-Geradstoßdiffusors, abhängig von der Nasendicke $d/\sqrt{F_{1'}} = (\sqrt{F_{2'}/F_{1'}} - 1)/\sqrt{\pi}$.

Dagegen schrumpft nach Überschreiten der Flug-*Mach*zahl 1 der Bereich kleiner $F_1$ sehr rasch völlig gegen Null, da hier dem anwachsenden Anströmschub der konstante Vakuumsog gegenübersteht. Bei höheren Flug-*Mach*zahlen kann daher $F_1$ praktisch nie kleiner als $F_{1'}$ werden.

Aus Abb. 9 läßt sich ablesen, in welchem Umfang sich diese engen Regelbereiche durch dickere Nasen erweitern lassen, insbesondere sieht man, daß $F_{2'}/F_{1'} > 1{,}5$, d. h. Nasendicken über 12% des gebauten Einlaufdurchmessers, sinnlos werden, da sie im Bereich großer $F_1/F_{1'}$ wegen Erreichens der Schallgeschwindigkeit in $F_{1'}$ unwirksam sind, im Bereich kleiner $F_1/F_{1'}$ praktisch kaum eine Erweiterung des Regelbereiches bewirken, und außerdem sehr ungünstig auf den hier nicht betrachteten reinen Luftwiderstand des Diffusors wirken, besonders wenn $F_1/F_{1'} = 1$ ist. Die tatsächlich ungleichmäßige Druckverteilung auf die Diffusornase wird die zu 12% gefundene Grenze der Nasendicke vielleicht noch etwas weiter hinausschieben.

Die tatsächlichen Regelgrenzen des Luftdurchsatzes werden aus diesem Grunde aber sogar noch etwas enger sein, als Abb. 9 angibt, da die wirkliche Strömung nicht die vorausgesetzten extremen Drücke auf der ganzen Stirnfläche der Diffusornase herstellen wird.

Eine Luftdurchsatzregelung des Diffusors fester geometrischer Gestalt wird daher in den angegebenen Grenzen im Fluggeschwindigkeitsbereich des Schalldurchganges zwischen $F_1/F_{1'} < 1$ und $F_1/F_{1'} = 1$ möglich sein, im Bereich höherer Überschall-*Mach*zahlen dagegen zwischen $F_1/F_{1'} = 1$ und $F_1/F_{1'} > 1$.

Beim Staustrahltriebwerk mit fester Triebwerksgeometrie kann diese Variation des Luftdurchsatzes bekanntlich[1] durch Änderung der Aufheizungstemperatur der Luft erzielt werden, indem bei sinkender Aufheizung der Luftdurchsatz steigt und der Schub sinkt und umgekehrt.

Man wird beim Schalldurchgang daher mit hoher Aufheizung zu fahren haben, bei höherer Fluggeschwindigkeit dagegen mit niedrigerer Aufheizung, was auch den flugmechanischen und thermischen Anforderungen entspricht.

Die in Abb. 9 dargestellten Begrenzungen engen also den Bereich der automatischen Querschnittsanpassung an den Durchfluß beim Überschall-Fangdiffusor sehr merkbar ein, dieser ist weit weniger elastisch, als der entsprechende Unterschall-Fangdiffusor.

**7. Adiabatische Einströmung.** Während die Unterschall-Anströmung vor dem Diffusor, zwischen $F_1$ und $F_{1'}$, ohne weiteres als isentropisch angenommen werden durfte, ist dies für die eigentliche Diffusordurchströmung zwischen $F_{1'}$ und $F_2$ wegen der dort merkbaren Grenzschichtverluste an den festen Wänden erfahrungsgemäß nicht mehr der Fall, sie bleibt indes näherungsweise adiabatisch.

Der Druckdiffusorteil hat einen von Eins verschiedenen „Diffusorwirkungsgrad" $\eta_D$, worunter man traditionsgemäß das Verhältnis der im Druckdiffusorteil wirklich erzeugten Druckerhöhung zu der bei isentropischer Strömung theoretisch erzeugbaren Druckerhöhung versteht, und der empirisch ermittelt wird. Dieser traditionelle Wirkungsgrad stellt bei kompressibler Strömung allerdings weder ein Energieverhältnis, noch im allgemeinen ein Schubverhältnis dar.

Die tatsächlich erreichten Diffusorwirkungsgrade $\eta_D$ bei den üblichen Durchströmgeschwindigkeiten hängen hauptsächlich von der Diffusorbauart ab und gehen praktisch von Werten über $\eta_D = 0{,}95$ bei großen, sorgfältig geformten Diffusoren, bis herunter zu den Werten der *Borda-Carnot*schen Strahlausbreitung bei vollständiger Strömungsablösung $\eta_{DB} = 2/(1 + F_2/F_{1'})$, vorausgesetzt, daß der Diffusor lang genug ist, um völlige Strahldurchmischung zu erlauben, andernfalls kann der Diffusorwirkungsgrad auch noch kleiner werden.

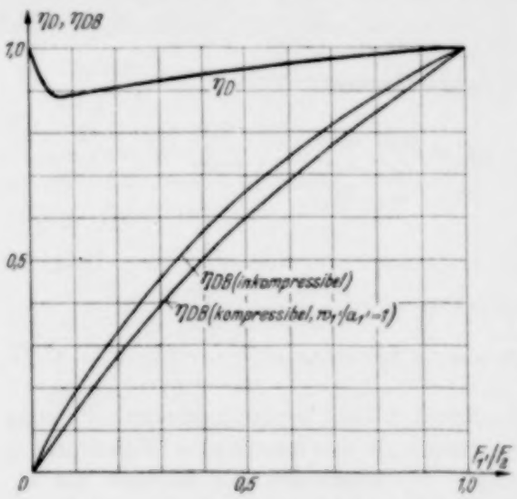


Abb. 10. Verlauf des Wirkungsgrades $\eta_D$ großer, gutgeformter Diffusoren über dem gebauten Diffusorverhältnis $F_{1'}/F_2$, im Vergleich zur schublosen *Borda-Carnot*schen Verdichtungsströmung $\eta_{DB}$.

Er hängt aber außerdem von der Durchströmgeschwindigkeit selbst ab, wie man schon daran erkennt, daß bei $w_2 = 0$ jedenfalls der volle Staudruck erreicht werden muß, d. h. bei $F_{1'}/F_2 = 0$ muß $\eta_D$ gegen Eins gehen, und ebenso wächst er mit anwachsendem Diffusorverhältnis $F_{1'}/F_2$, indem er dem Wirkungsgrad der schublosen, *Borda-Carnot*schen Strömung ausweicht, die ja bei Diffusorverhältnissen über $F_{1'}/F_2 = 0{,}75$ selbst schon die Wirkungsgrade guter Diffusoren übersteigt.

Abb. 10 zeigt dieses Verhalten eines großen, gutgeformten Diffusors von etwa konstantem Öffnungswinkel im inkompressiblen Strömungsbereich — der mit anwachsenden Überschallgeschwindigkeiten wieder gut zutrifft — über dem gebauten Diffusorverhältnis $F_{1'}/F_2$. Die Angabe eines 90 bis 95%igen Diffusorwirkungsgrades bezieht sich naturgemäß auf mittlere $F_{1'}/F_2$, in deren Grenzbereichen (Null bzw. Eins) steigt der Wirkungsgrad notwendig gegen Eins, einerseits weil der Staudruck für $F_{1'}/F_2 \to 0$ voll erreicht wird, anderseits weil, wie gesagt, der Wirkungsgrad der schubfreien Verdichtungsströmung mit voller Strömungsablösung bei $F_{1'}/F_2 \to 1$ nicht unterschritten werden kann.

Diese Komplikation rührt von der unzweckmäßigen traditionellen Definition des Diffusorwirkungsgrades, dessen Zahlenwerte auch bei völligem Versagen des Diffusors nicht unter jene der in Abb. 10 eingezeichneten Wirkungsgrade der *Borda-Carnot*schen Strömung sinken können. Der Wirkungsgrad des Diffusors als Antriebselement wird natürlich in Wahrheit

[1] *E. Sänger*, Schw. Arch. f. angew. Wiss. u. Technik, 16 (1950), S. 341.

nicht erst bei der Drucksteigerung Null gleich Null, sondern — auf die Verhältnisse in $F_{1'}$ bezogen — schon dann, wenn der Schub auf die Diffusorwände infolge der Strömungsverzögerung zwischen $F_{1'}$ und $F_2$, also die Diffusorwirkung verschwindet. Das ist aber bereits beim Erreichen der schublosen *Borda-Carnot*-Strömung der Fall, die selbst noch erhebliche Drucksteigerungen aufweist. Man wird daher eher damit rechnen dürfen, daß ein Ausdruck von der Art $(\eta_D - \eta_{DB})/(1 - \eta_{DB})$ über weitere $F_{1'}/F_2$-Bereiche konstant ist.

Da in Abb. 10 die Ordinate $\eta_D = 1$ dem vollen, verlustlosen Diffusorschubgewinn der Innendurchströmung entspricht, erkennt man, daß eine Wirkungsgradverminderung um einen bestimmten Bruchteil nur im Falle $F_{1'}/F_2 \to 0$ dem gleichen Bruchteil an Schubgewinn-Verminderung entspricht, mit anwachsendem $F_{1'}/F_2$ jedoch immer größeren Schubverlusten. Dies gilt allerdings nur für jenen Schubanteil, der durch die Druckerhöhung infolge der Innendurchströmung allein bewirkt wird, z. B. nicht aber für den Anteil an Druckerhöhung infolge des Verdichtungsstoßes oder infolge der isentropischen Unterschallanströmung.

Dieses Wirkungsgradproblem verliert infolgedessen bei dem hier zu betrachtenden Überschalldiffusor, besonders bei höheren *Mach*zahlen, sehr an praktischer Bedeutung durch den Umstand, daß der größte Teil der nützlichen Drucksteigerung und Schuberzeugung schon durch den geraden Verdichtungsstoß und zum Teil auch durch die Unterschall-Anströmung erzeugt wird, denen gegenüber die Drucksteigerung der Einlaufströmung selbst oft eine geringere Rolle spielt.

Zur Berechnung der Einlaufströmung mit Verlusten kann man folgende Beziehungen verwenden, wenn die Dissipation der entstehenden Turbulenz in Enthalpie unendlich schnell angenommen wird. An Stelle des isentropischen Enddruckes $p_2^*$ erhält man nur den wirklichen Enddruck

$$p_2 = p_{1'} + \eta_D (p_2^* - p_{1'}) .$$

Bei der nichtisentropischen jedoch adiabatischen Strömung zwischen $F_{1'}$ und $F_2$ stehen daher die fünf Beziehungen zur Verfügung, für

**Kontinuität:** $$\varrho_{1'} F_{1'} w_{1'} = \varrho_2 F_2 w_2 ,$$

**Energie:** $$\frac{w_{1'}^2}{2g} + c_{p\vartheta 1'} T_{1'} = \frac{w_2^2}{2g} + c_{p\vartheta 2} T_2 ,$$

**Zustandsgleichung:** $$\frac{p_{1'}}{\varrho_{1'} R_{1'} T_{1'}} = \frac{p_2}{\varrho_2 R_2 T_2} ,$$

**Diffusorwirkungsgrad:** $$\eta_D = \frac{p_2 - p_{1'}}{p_2^* - p_{1'}} ,$$

**Isentropischer Druckaufbau:**
$$\frac{F_2}{F_{1'}} = \frac{(p_2^*/p_{1'})^{-1/\sigma_{1'2}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sigma_1} \frac{c_{p\vartheta 1'}}{R_{1'}} a_{1'}^2/w_{1'}^2 \left[1 - \frac{R_{1'}}{R_2} \frac{c_{p\vartheta 2}}{c_{p\vartheta 1'}} (p_2^*/p_{1'}) \frac{\sigma_{1'2}-1}{\sigma_{1'2}}\right]}} .$$

Aus den beiden letzten Beziehungen folgt ohne weiteres der Zusammenhang des $p_2/p_{1'}$ mit $F_2/F_{1'}$ und $w_{1'}/a_{1'}$ zu

$$\frac{F_2}{F_{1'}} = \frac{\left(1 + \frac{p_2/p_{1'} - 1}{\eta_D}\right)^{-1/\sigma_{1'2}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{\sigma_{1'} R_{1'}} \frac{c_{p\vartheta 1'}}{(a_1^2/w_1^2)} \left[1 - \frac{R_{1'}}{R_2} \frac{c_{p\vartheta 2}}{c_{p\vartheta 1'}} \left(1 + \frac{p_2/p_{1'} - 1}{\eta_D}\right)^{\frac{\sigma_{1'2}-1}{\sigma_{1'2}}}\right]}} . \tag{22}$$

Mit Hilfe ausreichender Zustandsdiagramme der Luft bis in den thermochemischen Strömungsbereich und mit Hilfe der Gleichungen (13), (9), (7), (5) und (2) kann man die Funktion (22) in der Form

$$\frac{p_2}{p_{1'}} = \pi_{21} \left(\frac{F_2}{F_{1'}}, \frac{F_{1'}}{F_1}, \frac{w_1}{a_1}, \eta_D\right) \tag{22'}$$

tabellieren oder in Diagrammform bringen, so daß die Zahlenwerte ein für alle Mal verfügbar sind. Gleichung (22′) ist offenbar lediglich eine Erweiterung von (9′).

Wenn damit $p_2/p_{1'}$ bekannt ist, folgen aus den übrigen der fünf Beziehungen die restlichen Zustandsgrößen des Gases in $F_2$ zu

$$\frac{w_2}{w_{1'}} = \sqrt{\left(\frac{c_{p\,02}}{\sigma_{1'} R_2}\frac{F_2}{F_1}\frac{r_2}{p_{1'}}\frac{a_{1'}^2}{w_{1'}^2}\right)^2 + \frac{2\,c_{p01'}}{\sigma_{1'} R_{1'}}\frac{a_{1'}^2}{w_{1'}^2}} - \frac{c_{p\,02}}{\sigma_{1'} R_2}\frac{F_2}{F_{1'}}\frac{p_2}{p_{1'}}\frac{a_{1'}^2}{w_{1'}^2}, \tag{23}$$

$$\frac{T_2}{T_{1'}} = \frac{R_{1'} F_2\, p_2\, w_2}{R_2 F_{1'} p_{1'} w_{1'}}, \tag{24}$$

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_{1'}} = \frac{F_{1'} w_{1'}}{F_2 w_2}, \tag{25}$$

$$\frac{w_2/a_2}{w_{1'}/a_{1'}} = \sqrt{\frac{\sigma_{1'} F_{1'} p_{1'} w_2}{\sigma_2 F_2 p_2 w_{1'}}}. \tag{26}$$

Eine Komplikation entsteht erst wieder, wenn man in $F_2$ so hohe Massenflüsse fordert, daß in $F_{1'}$ die Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Damit ist die bekannte Grenze für den Fluß $\varrho_2 w_2$ erreicht und der Druckdiffusor müßte weiterhin als divergente Überschalldüse wirken, also mit Überschallgeschwindigkeit bei fallendem Druck durchströmt werden. Da bei den praktischen Anwendungen jedoch meist $p_2 > p_1$ ist, wird die Strömung im Diffusor mittels eines oder mehrerer Verdichtungsstöße wieder zu Unterschallgeschwindigkeit zurückkehren.

Die Lage eines einzelnen Verdichtungsstoßes ist dadurch bestimmt, daß die Drucksteigerung durch ihn und durch die anschließende Verdichtungsströmung in dem dann wieder als Diffusor wirkenden, divergenten Strömungskanal auf den höchstmöglichen Druck $p_2$ zurückführen.

Eine einfache Nachrechnung zeigt, daß $p_2$ um so höher wird, je weiter vorne der Verdichtungsstoß im Diffusor sitzt, und am höchsten, wenn der dann verschwindende Verdichtungsstoß in $F_{1'}$ säße. Je weiter der Stoß in den Diffusor hineinwandert, desto geringer wird $p_2$, der Diffusorwirkungsgrad sinkt in diesem Fall außerordentlich ab.

Die adiabatische Einlaufströmung mit Verdichtungsstößen im Innern des divergierenden Diffusors bietet daher kein praktisches Interesse und wird tunlichst zu vermeiden sein.

**8. Schub des Diffusors.** Der Gesamtschub $P_{1'2}$ der Einlaufströmung, d. h. die geometrische Summe aller Über- oder Unter-Drücke gegenüber dem ungestörten, atmosphärischen Umgebungsdruck $p_1$ auf die festen Innenwände des Diffusors, folgt ohne weiteres aus dem Impulssatz

$$\varrho_2 F_2 w_2^2 - \varrho_{1'} F_{1'} w_{1'}^2 = p_{1'} F_{1'} + P_{1'2} - p_2 F_2$$

zu

$$P_{1'2} = P_{1'2} - p_1 (F_2 - F_{1'}) = F_2 (p_2 - p_1 + \varrho_2 w_2^2) - F_{1'} (p_{1'} - p_1 + \varrho_{1'} w_{1'}^2)$$

oder, in Analogie zu Abschnitt 5

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_{1'2}}{\varrho_1 F_1 w_1^2} &= \frac{p_2 - p_1}{\varrho_1 w_1^2}\frac{F_2}{F_1} + \frac{\varrho_2 F_2 w_2^2}{\varrho_1 F_1 w_1^2} - \frac{p_{1'} - p_1}{\varrho_1 w_1^2}\frac{F_{1'}}{F_1} - \frac{\varrho_{1'} F_{1'} w_{1'}^2}{\varrho_1 F_1 w_1^2} \\ &= \frac{1}{\sigma_1}(a_1^2/w_1^2)\left[\frac{F_2}{F_1}(\pi_{21'}\cdot\pi_{1'x}\cdot\pi_{x1} - 1) - \frac{F_{1'}}{F_1}(\pi_{1'x}\pi_{x1} - 1)\right] + \frac{w_{1'}}{w_x}\frac{w_x}{w_1}\left(\frac{w_2}{w_{1'}} - 1\right),\end{aligned}\right| \tag{27}$$

worin noch für $w_{1'}/w_x$, $w_x/w_1$, $w_2/w_{1'}$ beziehungsweise die Ausdrücke (10), (2) und (23′) zu setzen sind.

In dem auch praktisch wichtigen Sonderfall, daß der Wirkungsgrad $\eta_D$ der adiabatischen Einlaufströmung sich eins nähert, also auch dieser Strömungsteil isentropisch wird, braucht bei der Schubberechnung kein Unterschied zwischen den beiden Strömungsteilen zwischen $F_1$ und $F_{1'}$ einerseits und $F_{1'}$ und $F_2$ anderseits gemacht zu werden. Wir setzen in diesem Fall näherungsweise $F_{1'}/F_1 = w_{1'}/w_x = \pi_{1'x} = 1$ und erhalten eine vereinfachte Form der Gleichung (27), die der Gleichung (17) entspricht:

$$\frac{P_{12}}{\varrho_1 F_1 w_1^2} = \frac{1}{\sigma_1}(a_1^2/w_1^2)\left[\frac{F_2}{F_1}(\pi_{2x}\cdot\pi_{x1} - 1) - (\pi_{x1} - 1)\right] + \frac{w_x}{w_1}\left(\frac{w_2}{w_x} - 1\right), \tag{28}$$

die in diesem Fall den gesamten Schub, einschließlich jenem der Einlaufströmung umfaßt.

Nebenbei bemerkt, erhält man durch Nullsetzen dieser Gleichung eine Beziehung für die *Borda-Carnot*sche Verdichtungsströmung in nichtidealen Gasen.

Der üblicherweise auf die Hauptspantfläche $F_2$ des Diffusors bezogene Beiwert des gesamten Diffusorschubes wird mit (28)

$$c_s = \frac{2\,P_{12}}{\varrho_1 F_2 w_1^2} = \frac{2}{\sigma_1}(a_1^2/w_1^2)\left[(\pi_{2x}\pi_{x1} - 1) - \frac{F_1}{F_2}(\pi_{x1} - 1)\right] + 2\frac{F_1}{F_2}\frac{w_x}{w_1}\left(\frac{w_2}{w_x} - 1\right). \quad (29)$$

Bei $F_1/F_2 \to 0$ wird der Durchfluß null und

$$c_s = \frac{2}{\sigma_1}(a_1^2/w_1^2)(\pi_{2x}\pi_{x1} - 1). \quad (30)$$

Dies ist also der einzige Fall, wo Schub und Drucksteigerung $(p_2 - p_1)$ im Diffusor einander streng proportional sind, $P_{1'2} = F_2(p_2 - p_1)$, also wenn $(p_2 - p_1)$ proportional $\eta_D$ ist, wie im Unterschallbereich, auch $P$ und $\eta_D$ proportional werden.

Dieser Schub entspricht genau dem Schub auf den Brennkammerboden einer Rakete. Sein Aufbau muß natürlich dadurch gesichert sein, daß die vorausgesetzte, geordnete Diffusorströmung vor dem Zusammenbruch bewahrt wird, z. B. durch eine den Diffusor in $F_2$ abschließende Membran, auf die dann genau derselbe Gegenschub wirkt, oder durch die üblichen Triebwerkseinrichtungen, wie Aufheizung der Luft und Absenkung des Druckes bis zum Außendruck oder wenigstens bis zum kritischen Druck.

Der Fall des Aufstaues auf die Geschwindigkeit $w_2 = 0$ ist zugleich der einzige, wo die Drucksteigerung $p_2/p_1 = \pi_{2x} \cdot \pi_{x1}$ in geschlossener Form anschreibbar ist. Mit Hilfe von (3) und (22) für $F_{1'}/F_2 \to 0$ wird

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_x}\frac{p_x}{p_1} = \pi_{2x}\pi_{1x} = \left\{1 + \eta_D\left\{\left[\frac{R_2}{R_x}\frac{c_{p\,0x}}{c_{p\,02}}\left(1 + \frac{\sigma_x R_x}{2\,c_{p\,0x}} w_x^2/a_x^2\right)\right]^{\frac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x2}-1}} - 1\right\}\right\}\left[1 + \sigma_1(w_1^2/a_1^2)\left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right)\right] \quad (31)$$

in thermochemischer Schreibweise, wobei für $w_x/w_1$ Gleichung (2) zu benützen ist, für $w_x^2/a_x^2$ die Gleichung (7).

Im thermodynamischen Bereich, also für Flug-*Mach*zahlen $w_1/a_1 < 6$, vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\frac{p_2}{p_1} = \pi_{x2}\pi_{x1} = \left\{1 + \eta_D\left\{\left[\frac{\varkappa_{02} - 1}{\varkappa_{02}}\frac{\varkappa_{0x}}{\varkappa_{0x} - 1}\left(1 + \frac{\varkappa_x}{2}\frac{\varkappa_{0x} - 1}{\varkappa_{0x}} w_x^2/a_x^2\right)\right]^{\frac{\varkappa_{x2}}{\varkappa_{x2}-1}} - 1\right\}\right\}\left[1 + \varkappa_1(w_1^2/a_1^2)\left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right)\right] \quad (31a)$$

wobei für $w_x/w_1$ Gleichung (2a) zu benützen ist, für $w_x^2/a_x^2$ Gleichung (7a).

Endlich vereinfacht sich (31) im gasdynamischen Bereich, also für Flug-*Mach*zahlen $w_1/a_1 < 2$, zu

$$\frac{p_2}{p_1} = \pi_{2x}\pi_{x1} = \left\{1 + \eta_D\left[\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} w_x^2/a_x^2\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} - 1\right]\right\}\left[1 + \varkappa(w_1^2/a_1^2)\left(1 - \frac{w_x}{w_1}\right)\right], \quad (31b)$$

oder wenn man hier (2b) und (7b) gleich einsetzt,

$$\frac{p_2}{p_1} = \pi_{2x}\pi_{x1} = \left\{1 + \eta_D\left\{\left[\frac{\frac{\varkappa+1}{2} w_1^2/a_1^2}{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} w_1^2/a_1^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} - 1\right\}\right\}\left[1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}(w_1^2/a_1^2 - 1)\right]. \quad (31'b)$$

Setzt man schließlich auch noch $\eta_D = 1$, so folgt die bekannte *Lord Rayleigh*sche Beziehung (3'b)

$$\frac{p_2}{p_1} = \pi_{2x}\pi_{x1} = \left[\frac{\frac{\varkappa+1}{2} w_1^2/a_1^2}{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} w_1^2/a_1^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1} w_1^2/a_1^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right) \quad (31''b)$$

mit ihrem Analogon im Unterschallbereich:

$$\frac{p_2}{p_1} = \pi_{2x} = \left(1 + \frac{\varkappa-1}{2} w_1^2/a_1^2\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}. \quad (31'''b)$$

Für $w_1/a_1 = 1$ geben die beiden letzten Gleichungen natürlich denselben Wert. Bildet man für den nach (30) mit (31'''b) berechneten Schubbeiwert die Ableitung nach der Flug-*Mach*zahl, $\partial c_s/\partial(w_1/a_1)$ und setzt diese gleich null, so folgt an der Stelle $w_1/a_1 = 0$ ein Minimum von der Höhe $c_s = 1$.

Derselbe Vorgang mit den Überschallbeiwerten aus (30) und (31''b) führt zu einem Maximum von $c_s = 1{,}85$ bei $w_1/a_1 = \infty$, d. h. außerhalb des Gültigkeitsbereiches der gasdynamischen Beziehung.

Da mit unbegrenzt wachsender *Mach*zahl die Isentropenexponenten aller wirklichen Stoffe physikalisch gegen $\varkappa \to 1$ konvergieren, geht der tatsächliche Grenzwert der Schubbeiwerte gegen den alten *Newton*schen Wert $c_s = 2$, der aus der elementaren Mechanik ebenso folgt, wie aus (30) und (31''b).

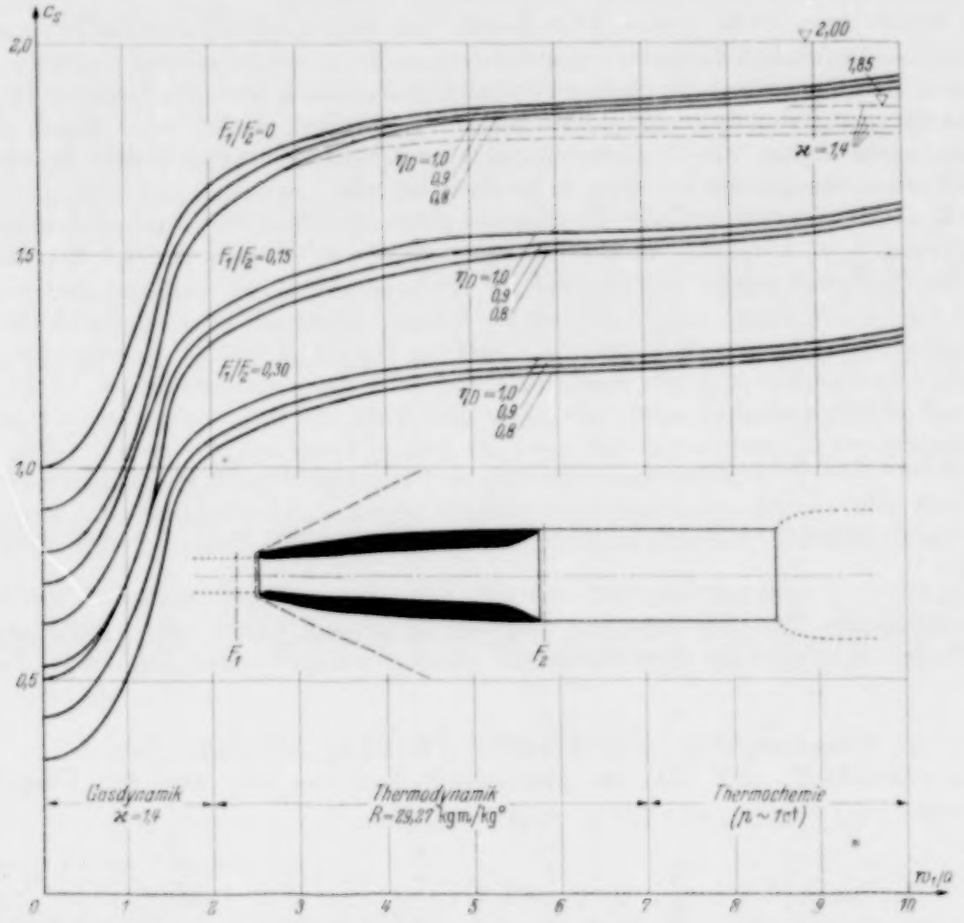


Abb. 11. Schubbeiwerte $c_s = P/q\,F_2$ des Überschall-Geradstoßdiffusors, über der Flug-*Mach*zahl $w_1/a_1$.

Den Gesamtverlauf der $c_s$ über alle drei Strömungsbereiche für $F_1/F_2 \to 0$ zeigt Abb. 11. Im gasdynamischen Bereich stimmt er überein mit der bekannten Auftragung der Beiwerte des Druckanstieges vor einem Staupunkt im Überschallbereich.

Insgesamt beginnen die Beiwerte mit der Flug-*Mach*zahl Null bei $c_s = 1$ und streben mit der *Mach*zahl Unendlich gegen $c_s = 2$. Bei der Flug-*Mach*zahl 10 in Bodennähe bedeutet der dargestellte Beiwert einen Schub von über 1300 Tonnen je Quadratmeter Hauptspantfläche.

In Abb. 11 sind auch die $c_s$-Verläufe für einige endliche $F_1/F_2 \neq 0$ angegeben, deren Zahlenwerte sich leicht aus (29) ergeben, wenn man die $\pi_{2x}$ für die jeweils vorliegenden Verhältnisse von $w_1/a_1$ und $F_1/F_2$ aus Abb. 6 abgreift, die $\pi_{x1} = p_x/p_1$ und $w_x/w_1$ aus Abb. 4 und die $w_2/w_x$ aus Abb. 7.

Der Einfluß des Diffusorwirkungsgrades $\eta_D$ auf den Schubbeiwert ist am größten im Unterschallbereich, um mit zunehmender Überschall-Flug-*Mach*zahl in dem Maß abzusinken, wie die Druckerhöhung zunehmend durch den senkrechten Verdichtungsstoß und nur mehr zu immer geringeren Anteilen durch die verzögerte Strömung im konischen Diffusor stattfindet, auf welch letztere allein der Diffusorwirkungsgrad bezogen ist.

Die Gegenüberstellung dieser durchwegs außerordentlich hohen Schubbeiwerte mit den bekannten Widerstandsbeiwerten von Überschall-Flugkörpern zeigt die hohe Wirksamkeit des Überschall-Geradstoßdiffusors als Antriebsorgan.

Die dargestellten hohen Diffusorschübe werden immer einen wesentlichen Anteil des Schubes eines vollständigen Luftstrahltriebwerkes bilden.

Folgen hinter dem Diffusor noch Kompressoren — eine Anordnung, die in Form von Turbinenstrahltriebwerken und Turbinenstaustrahltriebwerken bis etwa zur Flug-*Mach*zahl 2 sinnvoll sein kann — so mag der Triebwerksschub noch wesentlich über den Diffusorschub allein hinaussteigen.

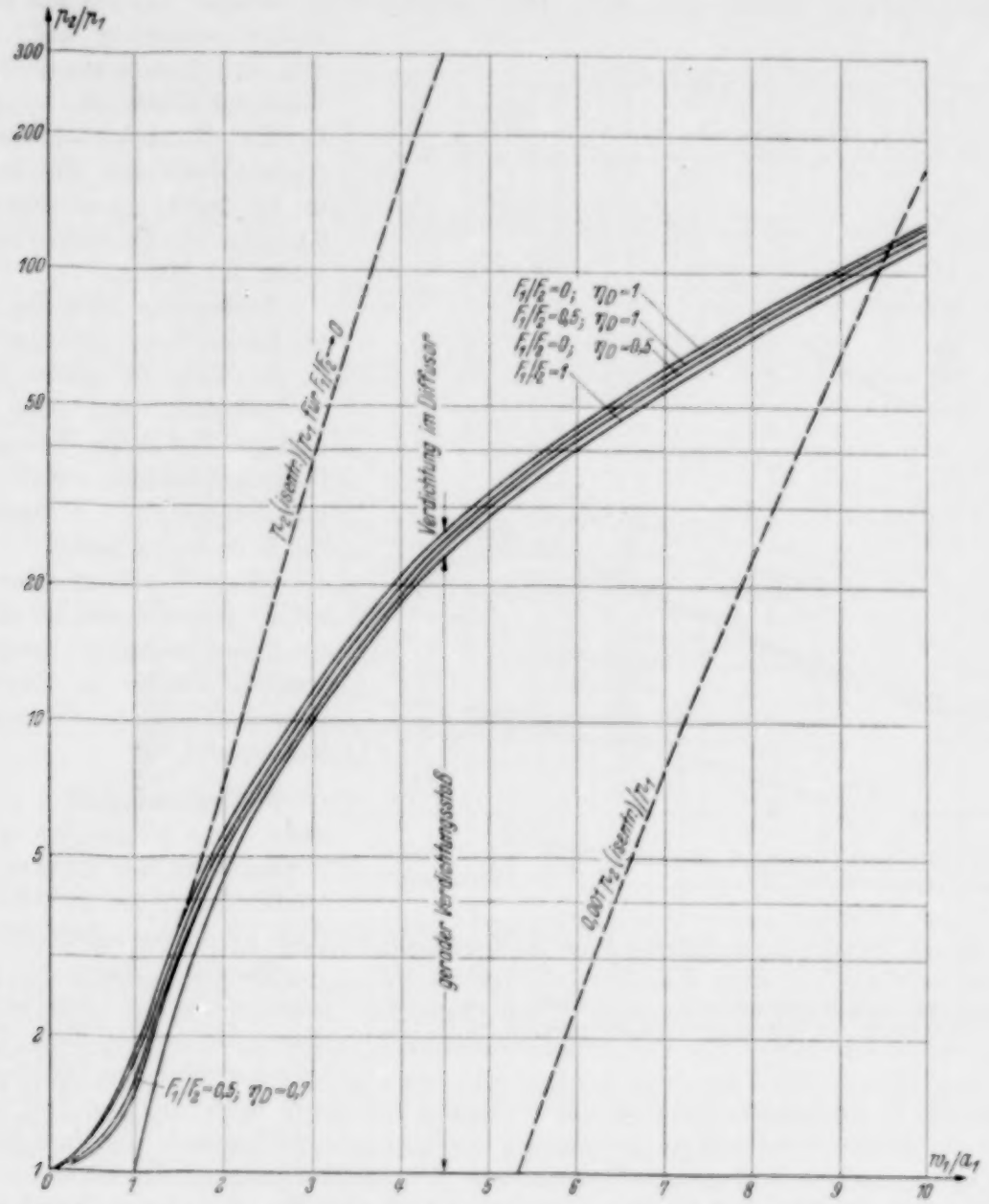


Abb. 12. Drucksteigerung $p_2/p_1$ am Ende eines Geradstoß-Diffusors in Abhängigkeit von der Flug-*Mach*zahl $w_1/a_1$, vom Diffusorverhältnis $F_1/F_2$ und vom Diffusorwirkungsgrad $\eta_D$.

Wird der Luftdruck jedoch nach dem Diffusor nicht mehr weiter erhöht, sondern die Luft nurmehr erwärmt — eine Anordnung, die in Form der reinen Staustrahltriebwerke je nach der Aufgabenstellung ab Flug-*Mach*zahlen von 1 bis 2 vorzuziehen ist —, dann folgt auf die meist zylindrische Heizkammer oft wieder eine Verengung des Strömungskanals zur Ausströmdüse. Diese Verengung gibt naturgemäß einen Gegenschub, so daß der Gesamtschub des Staustrahltriebwerkes dann kleiner als der dargestellte Diffusorschub wird.

Wenn man jedoch an den Diffusor nurmehr ein zylindrisches Rohr als Heizkammer und Ausströmdüse anschließt — wie die Nebenfigur in Abb. 11 dies andeutet — dann bleibt der Gesamtschub des Staustrahltriebwerkes gleich dem dargestellten Diffusorschub.

Diese Anordnung gibt also die höchsten Schübe, jedoch höheren Wärmeaufwand je Antriebseinheit, als eine eingezogene Düse. Sie ist also besonders für Geräte geeignet, bei denen

der spezifische Treibstoffverbrauch nur eine sekundäre Rolle spielt, z. B. für Kurzzeitgeräte oder bei Anwendung von Atomheizung.

Diese Geräte erlauben auch wegen ihrer Sonderverhältnisse am ehesten die Benützung des gesamten behandelten Flug-*Mach*zahlbereiches bis $v/a = 10$.

Im Falle der rein zylindrischen Abströmung muß offenbar die durchströmende Luft soweit aufgeheizt werden, daß sie die Verstopfungsgeschwindigkeit (~Schallgeschwindigkeit) erreicht, das Feuergas wird dann mit Überdruck gegenüber dem ruhenden Umgebungsdruck entlassen. Die Höhe der notwendigen Aufheizung wächst mit fallenden $F_1/F_2$, überschreitet etwa bei $F_1/F_2 \sim 0{,}25$ die mit chemischen Reaktionen erreichbaren Temperatursteigerungen und geht mit $F_1/F_2 \to 0$ gegen unendlich. Heizt man jedoch weniger, als bis zur thermischen Rohrverstopfung auf, bleibt also mit der Heizkammerströmung im Unterschallbereich, so gleicht sich der Druck nach rückwärts mit dem Außendruck aus, die Diffusorströmung bricht zusammen und die berechneten Diffusorschübe können nicht entstehen.

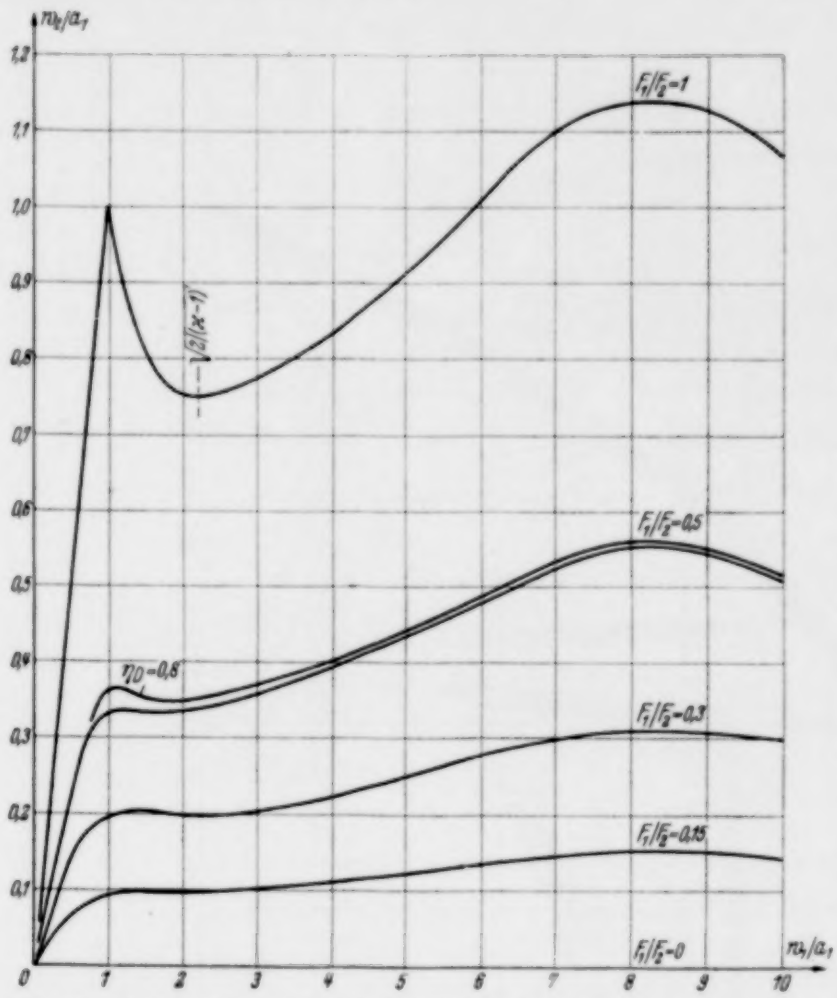


Abb. 13. Absolute Strömungsgeschwindigkeiten $w_2$ am Diffusorende (relativ zur Schallgeschwindigkeit $a_1$ der Umgebungsluft) in Abhängigkeit von der Flug-*Mach*zahl $w_1/a_1$, vom Diffusorverhältnis $F_1/F_2$ und vom Diffusorwirkungsgrad $\eta_D$

Anderseits führt die Aufheizung bis an die Verstopfungsgrenze auch in die Nähe instabiler Strömungsverhältnisse, die sehr sorgfältige und gleichmäßige Heizungsvorkehrungen erfordern, um zu verhindern, daß das gesamte Strömungssystem ins Schwingen gerät.

Diese Probleme der Ofenströmung fallen indes in den Bereich thermochemischer Strömung und werden daher in dieser thermodynamischen Studie nicht weiter behandelt[1].

**9. Zustandsgrößen am Diffusorende.** Die wichtigste quantitative Eigenschaft des Überschall-Geradstoßdiffusors ist zweifellos sein in Abb. 11 dargestellter Schub.

Daneben kann es jedoch für manche Zwecke wünschenswert sein, einen Überblick über die Luftzustandsgrößen am Diffusorende, also im Querschnitt 2, zu haben, etwa zur Berechnung der nach dem Diffusor folgenden Strömung, oder zur Beurteilung von mechanischen Festigkeitsverhältnissen, Anblaseverhältnissen der Feuerung, kritischen Strömungs-*Mach*zahlen, Wärmeübergang an die Diffusorwände usw.

Abb. 12 zeigt die Drucksteigerungen $p_2/p_1$ am Ende des Geradstoß-Druckdiffusors in Abhängigkeit von Eintrittsverhältnis $F_1/F_2$, von Flug-*Mach*zahl $w_1/a_1$ und vom Diffusorwirkungsgrad $\eta_D$. Bei höheren Flug-*Mach*zahlen erfolgt der Druckaufbau überwiegend durch den Verdichtungsstoß selbst und nur zum geringen Teil durch die Verdichtungsströmung im Diffusor, so daß dort der Einfluß des Diffusor-Eintrittsverhältnisses und des Diffusorwirkungsgrades sehr zurücktreten.

Die zum Vergleich noch eingezeichnete Kurve des isentropischen Druckanstieges läßt das unmäßige Anwachsen der isentropischen Staudrücke bei höheren *Mach*zahlen erkennen, die keineswegs von einem entsprechenden Anwachsen des Diffusorschubes selbst begleitet sind und zu baulichen Schwierigkeiten führen müßten.

Abb. 13 zeigt die absoluten Strömungsgeschwindigkeiten $w_2$ am Ende des Geradstoß-Druckdiffusors (relativ zur Schallgeschwindigkeit $a_1$ der Umgebungsluft) in Abhängigkeit

[1] *E. Sänger*, Schweizer Arch. f. angew. Wiss. u. Technik, 16 (1950), S. 341.

von der Flug-*Mach*zahl $w_1/a_1$, vom Eintrittsverhältnis $F_1/F_2$ und vom Diffusorwirkungsgrad $\eta_D$.

Bemerkenswert erscheint, daß die absoluten Strömungsgeschwindigkeiten nach dem geraden Verdichtungsstoß zunächst merkbar abnehmen, besonders bei großen Eintrittsverhältnissen, und daß sie auch bei den praktisch wichtigen kleinen $F_1/F_2$ nur sehr schwach zunehmen. Dieser Umstand hat für den Bau der Heizungen der Überschall-Staustrahlantriebe grundlegende Bedeutung.

Interessant ist ferner, daß der Einfluß der Kompressibilität der Luft bei der Verdichtungsströmung im Diffusorinnern, die das Abweichen der $w_2/w_1$ bzw. $w_2/w_x$ von $F_1/F_2$ bewirkt, in

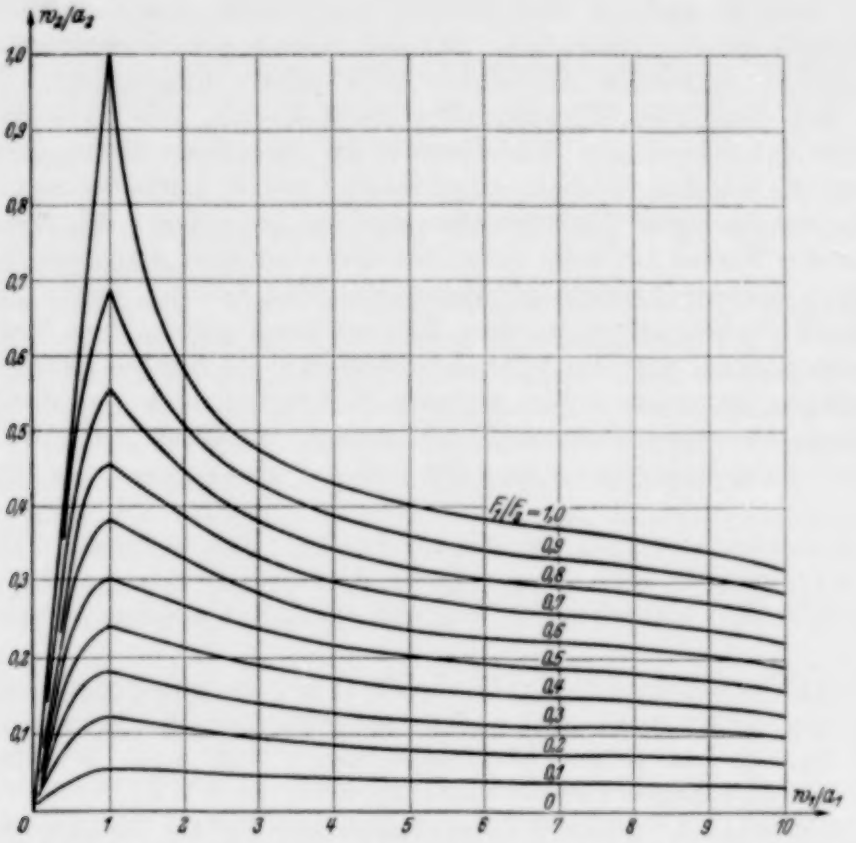


Abb. 14. Strömungs-*Mach*zahlen $w_2/a_2$ am Diffusorende in Abhängigkeit von der Flug-*Mach*zahl $w_1/a_1$ und vom Diffusorverhältnis $F_1/F_2$.

der Nähe der Flug-*Mach*zahl Eins am größten ist und sowohl nach kleineren, als auch nach größeren Flug-*Mach*zahlen abklingt, und schließlich, daß sich auch ein von eins verschiedener Diffusorwirkungsgrad besonders in der Nähe der Flug-*Mach*zahl Eins am stärksten auf die Strömungsgeschwindigkeit am Diffusorende auswirkt.

Abb. 14 zeigt schließlich die Strömungs-*Mach*zahlen $w_2/a_2$ am Ende des Geradstoßdiffusors in Abhängigkeit von der Flug-*Mach*zahl $w_1/a_1$ und vom Eintrittsverhältnis $F_1/F_2$, die im Überschallbereich mit wachsender Flug-*Mach*zahl monoton absinken.

(Eingegangen am 19. Dezember 1953.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Eugen Sänger*, Forschungsinstitut für Physik der Strahlantriebe, E.V. Stuttgart-Flughafen.

# Ein Beitrag zur Stabilitätstheorie der Wirbelstraßen unter Berücksichtigung endlicher und zeitlich wachsender Wirbelkerndurchmesser.*

Von U. Domm.

**1. Einleitung.** Von besonderer theoretischer und experimenteller Wichtigkeit sind einreihige und doppelreihige Wirbelstraßen. Bei der einreihigen Wirbelstraße sind die Wirbel auf einer Geraden in konstanten Abständen voneinander angeordnet. Die experimentelle Erfahrung zeigt, daß einreihige Wirbelstraßen instabil sind. Die hydrodynamische Theorie hat die Instabilität der einreihigen Wirbelstraße für die ideale Flüssigkeit durch Annahme kleiner Störungen, die an den Wirbeln angebracht werden, nachgewiesen.

Von denkbaren zweireihigen Wirbelstraßen sind im besonderen die Anordnungen studiert worden, bei denen die Wirbel auf zwei parallelen Geraden vom Abstande $h$ so angesetzt sind, daß ein Wirbel dem vorhergehenden im Abstande $l$, der Teilung, folgt. Die Zirkulation der Wirbel verschiedener Straßenseiten ist dem Betrage nach gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt. Fordert man, daß die Wirbelstraßen sich als Ganzes parallel zu den Geraden translatorisch bewegen, dann verbleiben nur zwei Konfigurationstypen der Wirbel: Entweder stehen sich die Wirbel der verschiedenen Straßenseiten gegenüber, oder die Wirbel stehen auf Lücke, d.h. die eine Straßenseite ist um die halbe Teilung gegen die andere Straßenseite verschoben.

Im Experiment beobachtet man nur die auf Lücke stehende Straße. Den ersten Hinweis findet man bei *A. Mallock*[1], die ersten eingehenden Untersuchungen bei *H. Bénard*[2]. Die theoretische Deutung der Wirbelstraße mit auf Lücke stehenden Wirbeln verdankt man *Th. v. Kármán*[3].

Nach *v. Kármán* ist in idealer Flüssigkeit die Wirbelstraße mit gegenüberliegenden Wirbeln instabil, während die Wirbelstraße mit auf Lücke stehenden Wirbeln unter der Bedingung $h/l = 0{,}281$ stabil ist. Später zeigte *Bl. Dolaptschiew*[4], daß diese Stabilitätsbedingung bei Berücksichtigung von Störungen zweiter Ordnung erhalten bleibt.

Von *Kármán* und *Rubach*[5] geben Meßergebnisse an, die die Theorie von *v. Kármán* gut bestätigen. *H. Bénard* konnte die Stabilitätsbedingung von *v. Kármán* experimentell nicht verifizieren. Er findet Werte von $h/l$ in einem Bereich von 0,24···0,56. *S. G. Hooker*[6] zeigte, daß man bei experimentellen Untersuchungen zur Bestimmung von $h/l$ eine Korrektur anbringen muß, die aus dem realen Kernprofil der Wirbel resultiert. Die Verbreiterung von Wirbelstraßen in einigem Abstand hinter dem Widerstandskörper ist nach *Hooker* nur ein scheinbarer Effekt. *R. Wille*[7] findet, daß $h/l$ eine Funktion der Zeit ist. Für kleine Zeiten geht $h/l$ gegen 0,28. Für große Zeiten kann $h/l$ erheblich von 0,28 abweichen. Diese Abweichungen sind sicher zum Teil auf die scheinbare Verbreiterung nach *Hooker* zurückzuführen. *Fage* und *Johansen*[8] geben $h/l$-Werte von 0,4 bis 0,5 an und stellen gleichzeitig fest, daß die Wirbelkerndurchmesser in einem Abstand von 8 Körperdurchmessern hinter dem Körper von der Größenordnung der Straßenbreite waren.

Die Arbeiten von *Hooker*, *Wille* und *Fage* und *Johansen* legen es nahe, in der Stabilitätstheorie der Wirbelstraßen auf das reale Geschwindigkeitsprofil der Wirbel, das sich unter der Wirkung der Reibung ausbildet, Rücksicht zu nehmen. Wenn man im übrigen das *v. Kármán*-

* Gekürzte Fassung einer von der Fakultät für Maschinenwesen an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg genehmigten Dissertation (Berichter: Prof. Dr.-Ing. *R. Wille*, Prof. Dr. phil. *E. Mohr*).

[1] *A. Mallock*, Proc. Roy. Soc. A. 79 (1907), S. 262.

[2] *H. Bénard*, C. R. 147 (1908), S. 839 u. 970; 156 (1913), S. 1003 u. 1225; 182 (1926), S. 1375 u. 1523; 183 (1926), S. 20 u. 184.

[3] *Th. v. Kármán*, Göttinger Nachrichten 1911 u. 1912.

[4] *Bl. Dolaptschiew*, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937), S. 313; 18 (1938), S. 263.

[5] *Th. v. Kármán* und *H. Rubach*, Physikal. Z. 13 (1912), S. 49.

[6] *S. G. Hooker*, Proc. Roy. Soc. A. 154 (1936), S. 67.

[7] *R. Wille*, Jahrbuch S. T. G. 46 (1952), S. 176.

[8] *A. Fage* und *F. C. Johansen*, Proc. Roy. Soc. A. 116 (1927), S. 170.

sche Modell der Wirbelstraße beibehält, dann ist, falls unter den abgewandelten Bedingungen noch Stabilität möglich ist, der Quotient $h/l$ als eine Funktion der Zeit zu erwarten. Diese Funktion muß die Bedingung erfüllen, daß eingeleitete kleine Störungen der Wirbel nicht beständig anwachsen.

**2. Das Geschwindigkeitsprofil des realen Wirbels.** Nach *Lamb*[1] gilt für das Abklingen eines Wirbels in der ebenen realen Strömung mit der kinematischen Zähigkeit $\nu$, der Zeit $t$, der Zirkulation zur Zeit Null $\Gamma_0$, dem Radiusvektor $r$ und der azimutalen Komponente der Geschwindigkeit $c_\varphi$ die Beziehung

$$c_\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right). \tag{1}$$

Für genügend große $r$ weicht $c_\varphi$ bei konstanten $t$ beliebig wenig vom idealen Profil $c_\varphi = \Gamma_0/2\pi r$ ab. Für kleine $r$ gilt die Entwicklung

$$c_\varphi \approx \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t}\, r\,. \tag{2}$$

Das bedeutet eine lineare Zunahme von $c_\varphi$ mit dem Radius. Der Kern des Wirbels rotiert also annähernd wie ein starrer Körper.

Für die folgenden Stabilitätsuntersuchungen soll das Geschwindigkeitsprofil (1) verwendet werden. Dabei wird es erforderlich, die Strömungsgeschwindigkeit in den Wirbelstraßen durch Summierung der induzierten Geschwindigkeiten der Einzelwirbel zu berechnen. Diese Überlagerung ist streng wegen der quadratischen Glieder der *Navier-Stokes*-Gleichungen nicht erlaubt. Diese verschwinden für den isolierten Wirbel in der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, sie verschwinden nicht mehr, wenn die Kreissymmetrie gestört ist. Für kleine Verhältnisse von Kernradius zu Straßenteilung wird man das Wirbelkerngebiet näherungsweise als isoliert in der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit betrachten dürfen. In der Umgebung der Wirbelkerne muß man sich auf die mit $1/r$ abnehmende Geschwindigkeit und die damit verbundene Vernachlässigbarkeit der quadratischen Glieder berufen. Man darf deshalb Näherungsaussagen für kleine Zeiten erwarten. Für große Zeiten ist die Superposition nur dann erlaubt, wenn die quadratischen Glieder in den *Navier-Stokes*-Gleichungen klein gegen die Reibungsglieder werden, d.h. bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten.

**3. Die Stabilitätsuntersuchung der einreihigen Wirbelstraße.** a) Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Man denke sich die Wirbelstraße zur Zeit $t = 0$ in der realen Flüssigkeit entstanden. Die Wirbel seien nach Abb.1 auf der $x$-Achse eines kartesischen Koordinatensystems angeordnet. Für die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten $u$, $v$, die ein Wirbel, der im Ursprung des Systems angeordnet ist, induziert, gilt im Aufpunkt $(x, y)$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= -\frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)\frac{y}{r}\,, \\ v(x,y) &= \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right)\frac{x}{r}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Abb. 1.

Die Einzelwirbel seien um kleine Strecken aus ihrer Normallage verrückt. Wenn die Störungskomponenten mit $x_n$ und $y_n$ bezeichnet werden, wobei für $n = -\infty, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +\infty$ ist, so liegen die $n$ Wirbel in den Punkten $(n\,l + x_n, y_n)$. Legt man den Aufpunkt in einen der betrachteten Wirbel, etwa denjenigen mit dem Index $\varkappa$, so erhält man als den Geschwindigkeitsbeitrag aller Wirbel auf den Aufwirbel

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_\varkappa}{dt} &= -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n{}' \frac{y_\varkappa - y_n}{r_{\varkappa n}^2}\left(1 - e^{-\frac{r_{\varkappa n}^2}{4\nu t}}\right), \\ \frac{dy_\varkappa}{dt} &= \frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n{}' \frac{x_\varkappa - x_n - (n-\varkappa)\,l}{r_{\varkappa n}^2}\left(1 - e^{-\frac{r_{\varkappa n}^2}{4\nu t}}\right), \\ r_{\varkappa n}^2 &= [x_\varkappa - x_n - (n-\varkappa)\,l]^2 + [y_\varkappa - y_n]^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1] *H. Lamb*, Lehrbuch der Hydrodynamik, 2. Auflage, Leipzig 1931, S. 669.

Dabei ist die Summierung über alle $n$ ausgenommen $n = \varkappa$ durchzuführen, was durch den Strich am Summenzeichen angedeutet wird. Da $\varkappa$ alle ganzen Zahlen durchläuft, liegt ein System von unendlich vielen Differentialgleichungen vor.

b) Die Linearisierung des Differentialgleichungssystems. Die Störungen $(x_n, y_n)$ mögen so klein gegen die Teilung $l$ sein, daß eine Linearisierung des vorliegenden Systems (4) erlaubt ist. Die linearisierten Bewegungsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_\varkappa}{dt} &= -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n{}' \frac{y_\varkappa - y_n}{(n-\varkappa)^2 l^2}\left(1 - e^{-\frac{(n-\varkappa)^2 l^2}{4\nu t}}\right), \\ \frac{dy_\varkappa}{dt} &= -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n{}' \frac{x_\varkappa - x_n}{(n-\varkappa)^2 l^2}\left(1 - e^{-\frac{(n-\varkappa)^2 l^2}{4\nu t}} - 2\frac{(n-\varkappa)^2 l^2}{4\nu t} e^{-\frac{(n-\varkappa)^2 l^2}{4\nu t}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Bei der Linearisierung tritt die Summe

$$\sum_n{}' \frac{1}{(n-\varkappa) l}\left(1 - e^{-\frac{(n-\varkappa)^2 l^2}{4\nu t}}\right) \tag{6}$$

auf. Sie ist im *Cauchy*schen Sinne konvergent und hat den Wert Null. Physikalisch bedeutet dies, daß man sich bei der Betrachtung auf die mittleren Teile einer beiderseits unendlich langen Straße beschränkt.

Das System (5) von unendlich vielen Differentialgleichungen wird nach dem Vorgange von *Th. v. Kármán*[1] durch Annahme von Phasenbeziehungen zwischen den Störungen der einzelnen Wirbel auf ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen zurückgeführt. Man setzt

$$x_n = \alpha\, e^{in\varphi}, \qquad y_n = \beta\, e^{in\varphi} \qquad (0 \leq \varphi \leq 2\pi). \tag{7}$$

Dann erhält man, wenn die dimensionslose Zeit $\tau = (4\nu/l^2)t$ eingeführt wird — sie bedeutet physikalisch bis auf einem konstanten Faktor das Quadrat des Quotienten aus Kernradius und Straßenteilung — und $f(\tau)$, $g(\tau)$ nach (8) definiert werden,

$$\left.\begin{aligned} f(\tau) &= 2\sum_1^\infty \frac{1-\cos n\varphi}{n^2}\left(1 - e^{-\frac{n^2}{\tau}}\right), \\ g(\tau) &= 2\sum_1^\infty \frac{1-\cos n\varphi}{n^2}\left(1 - e^{-\frac{n^2}{\tau}} - 2\frac{n^2}{\tau} e^{-\frac{n^2}{\tau}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

das zu lösende System

$$\begin{pmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\end{pmatrix} = -\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\begin{pmatrix}0 & f(\tau)\\ g(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \tag{9}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix}\alpha(0)\\ \beta(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} \qquad \text{für } \tau = 0.$$

c) Die Integration des simultanen Systems. Durch Integration von (9) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung gewinnt man

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} - \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau \begin{pmatrix}0 & f(\tau_1)\\ g(\tau_1) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha(\tau_1)\\ \beta(\tau_1)\end{pmatrix} d\tau_1 \tag{10}$$

und indem man für $\begin{pmatrix}\alpha(\tau_1)\\ \beta(\tau_1)\end{pmatrix}$ (10) einsetzt, gelangt man zu

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} - \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau \begin{pmatrix}0 & f(\tau_1)\\ g(\tau_1) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} d\tau_1 + \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2 \int_0^\tau\int_0^{\tau_1} \begin{pmatrix}f(\tau_1)\,g(\tau_2) & 0\\ 0 & g(\tau_1)\,f(\tau_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} d\tau_1\, d\tau_2 \tag{11}$$

[1] Vgl. Fußnote 4, von S. 400.

und schließlich durch wiederholte Fortsetzung des Verfahrens zu

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} - \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau \begin{pmatrix}0 & f(\tau_1)\\ g(\tau_1) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} d\tau_1 + \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2 \int_0^\tau\int_0^{\tau_1} \begin{pmatrix}f(\tau_1)\,g(\tau_2) & 0\\ 0 & g(\tau_1)\,f(\tau_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} d\tau_1\,d\tau_2\\ - \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^3 \int_0^\tau\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} \begin{pmatrix}0 & f(\tau_1)\,g(\tau_2)\,f(\tau_3)\\ g(\tau_1)\,f(\tau_2)\,g(\tau_3) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 + - \cdots .\end{aligned}\right| \qquad (12)$$

Wenn die Reihe (12) absolut konvergiert und der Differentialgleichung (9) genügt, so ist sie die verlangte Lösung des Problems, da die Anfangsbedingung sicher erfüllt ist.

Die Reihe (12) konvergiert so gut wie die Exponentialfunktion. Angenommen, die Reihen für $f(\tau)$, $g(\tau)$ konvergieren, dann genügen $f(\tau)$, $g(\tau)$ in einem endlichen Intervall $0 \leq \tau \leq \tau_0$ der Bedingung

$$|f(\tau)| < R\,, \quad |g(\tau)| < R\,, \quad R > 0\,.$$

Das $n$-te Glied der Reihe (12) läßt sich nunmehr abschätzen:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{n-1}\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^{n-1}\int_0^\tau\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{n-2}} \begin{pmatrix}0 & f(\tau_1)\,g(\tau_2)\cdots f(\tau_{n-1})\\ g(\tau_1)\,f(\tau_2)\cdots g(\tau_{n-1}) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} d\tau_1\cdots d\tau_{n-1}\\ \leq \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\alpha_0|\\ |\beta_0|\end{pmatrix}\frac{(R\tau_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,.\end{aligned}\right| \qquad (13)$$

Damit ist die Konvergenz bereits bewiesen.

Es bleibt zu zeigen, daß (12) der Differentialgleichung (9) genügt. Durch Differentiieren von (12) erhält man

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot\alpha\\ \dot\beta\end{pmatrix} &= -\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\begin{pmatrix}0 & f(\tau)\\ g(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} + \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2\int_0^\tau \begin{pmatrix}f(\tau)\,g(\tau_1) & 0\\ 0 & g(\tau)\,f(\tau_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} d\tau_1 - + \cdots\\ &= -\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\begin{pmatrix}0 & f(\tau)\\ g(\tau) & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} - \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau \begin{pmatrix}0 & f(\tau_1)\\ g(\tau_1) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} d\tau_1 + - \cdots\right\}.\end{aligned}$$

Die letzte Zeile zeigt, daß die Lösung (12) der Gleichung (9) genügt. Da die Anfangsbedingung ebenfalls erfüllt ist, ist die Reihe (12) die vollständige Lösung des Systems (9)[1].

d) Stabilitätsdiskussion der einreihigen Wirbelstraße. Die Lösung (12) wird je nach Wahl der Integrationskonstanten von wesentlich verschiedenem Charakter. Trägt man die Anfangswerte der Störungen nach Abb. 2 in einem rechtwinkligen Achsensystem auf und wählt man solche Anfangswerte, die durch Punkte des ersten und dritten Quadranten dargestellt werden, dann sind die Reihenglieder von (12) von alternierendem Vorzeichen. Im übrigen unterscheiden sich Lösungen, die aus am Ursprung des $\alpha_0, \beta_0$-Systems gespiegelten Anfangswerten hervorgehen, nur durch das Vorzeichen.

Abb. 2.

Wählt man Anfangswerte der Störungen, die durch Punkte des zweiten bzw. vierten Quadranten dargestellt sind, so gelangt man zu Reihen (12), deren Glieder von einerlei Vorzeichen sind.

Es ergibt sich zum Beispiel für die Anfangswerte $\alpha(0) = -|\alpha_0|$, $\beta(0) = |\beta_0|$

$$\left.\begin{aligned}\alpha = -\Bigg\{|\alpha_0| + \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau f(\tau_1)\,|\beta_0|\,d\tau_1 + \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2\int_0^\tau\int_0^{\tau_1} f(\tau_1)\,g(\tau_2)\,|\alpha_0|\,d\tau_1\,d\tau_2 +\\ + \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^3\int_0^\tau\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} f(\tau_1)\,g(\tau_2)\,f(\tau_3)\,|\beta_0|\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 + \cdots\Bigg\}\,,\end{aligned}\right| \qquad (14)$$

[1] Eine anschauliche Deutung dieses Verfahrens findet man bei *E. Mohr* im Zusammenhang mit der Kreiselbewegung in Math. Nachr. 6 (1950/51), S. 1.

$$\beta = \left\{ |\beta_0| + \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu} \int_0^{\tau} g(\tau_1)\,|\alpha_0|\,d\tau_1 + \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2 \int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1} g(\tau_1) f(\tau_2)\,|\beta_0|\,d\tau_1\,d\tau_2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^3 \int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} g(\tau_1) f(\tau_2)\, g(\tau_3)\,|\alpha_0|\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 + \cdots \right\}.$$

Wiederum gilt, daß die Lösung (14) bei Spiegelung der Anfangswerte am Ursprung des $\alpha_0, \beta_0$-Systems nur das Vorzeichen vertauscht.

In (14) liegt eine Lösung vor, die, falls $f(\tau)$, $g(\tau)$ größer als Null sind, zu beständig wachsenden Störungen führt. Es genügt zum Nachweis der Instabilität der einreihigen Wirbelstraße, daß mindestens eine Lösung zu beständig wachsenden Störungen führt. Man muß deshalb die Funktionen $f(\tau)$, $g(\tau)$ (8) näher betrachten. Die Konvergenz der Reihen, durch die $f(\tau)$, $g(\tau)$ dargestellt werden, ist sofort ersichtlich, da man die vorhandenen Reihen in solche aufspalten kann, die entweder mindestens wie $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergieren oder die wie $\sum_1^{\infty} e^{-\frac{n^3}{\tau}}$ konvergieren. Die Funktionen $f(\tau)$, $g(\tau)$ hängen vom Parameter $\varphi$, der Phasenbeziehung zwischen den Störungen, ab. Es genügt, zu zeigen, daß für einen erlaubten Phasenwinkel $\varphi$ mit $0 < \varphi < 2\pi$ die Funktionen $f(\tau)$, $g(\tau)$ größer als Null sind. Dabei sind für $\varphi$ die Grenzen 0 und $2\pi$ ausgeschlossen. Die Werte $\varphi = 0; 2\pi$ liefern im Sinne der Theorie keine echten Störungen, da sie einer Verschiebung der Wirbelstraße als Ganzes in der $(x,y)$-Ebene entsprechen.

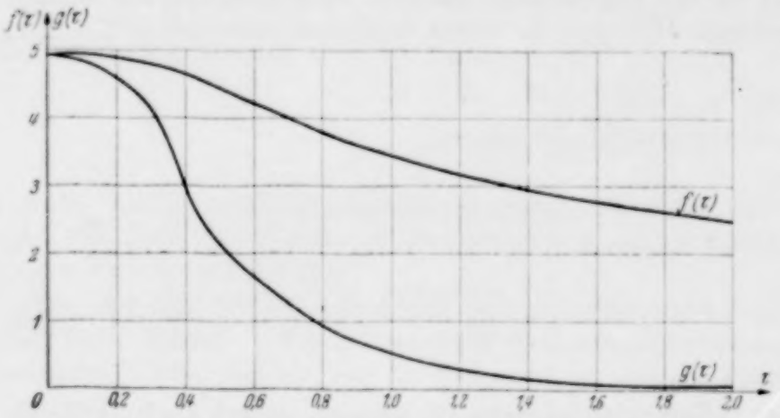


Abb. 3. Zur Stabilitätsdiskussion der einreihigen Wirbelstraße. Verlauf der Funktionen $f(\tau)$, $g(\tau)$ über $\tau$.

Abb. 4.

Für die zahlenmäßige Auswertung von $f(\tau)$, $g(\tau)$ wurde $\varphi = \pi$ gewählt. In Abb. 3 ist der Verlauf von $f(\tau;\pi)$, $g(\tau;\pi)$ über $\tau$ dargestellt.

Aus den dargelegten Ausführungen und dem Verlauf von $f(\tau;\pi)$, $g(\tau;\pi)$ ist bewiesen, daß die einreihige Wirbelstraße auch bei Berücksichtigung endlicher und zeitlich wachsender Wirbelkerndurchmesser instabil ist, da sie jedenfalls für den Phasenwinkel $\varphi = \pi$ instabil ist. Damit ist der Anschluß der Theorie an die experimentelle Erfahrung weiterhin gesichert.

**4. Die Stabilitätsuntersuchungen der zweireihigen Wirbelstraßen.** a) Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Wiederum denke man sich die Wirbelstraße zur Zeit $t = 0$ in der realen Flüssigkeit entstanden. Die Anordnung der Wirbel in der Wirbelstraße ergibt sich aus der Abb. 4.

Wenn man die Komponenten der Störungen der Einzelwirbel in der oberen Straßenseite mit $x_m$, $y_m$, diejenigen der unteren Straßenseite mit $x'_n$, $y'_n$ bezeichnet, erhält man die Koordinaten der Einzelwirbel

für die obere Reihe zu $\left(m\,l + x_m,\ \frac{h}{2} + y_m\right)$,

für die untere Reihe zu $\left(n\,l + x'_n,\ -\frac{h}{2} + y'_n\right)$

und für den Betrag des Radiusvektors zum Aufwirbel $\left(x_0,\ \frac{h}{2} + y_0\right)$ ergibt sich

in der oberen Reihe $r_{0m} = \sqrt{(x_0 - m\,l - x_m)^2 + (y_0 - y_m)^2}$,

in der unteren Reihe $r_{0n} = \sqrt{(x_0 - n\,l - x'_n)^2 + (h + y_0 - y'_n)^2}$.

Mit $u_0(t)$ als gemeinsamer Translationsgeschwindigkeit des Wirbelsystems in Richtung der Parallelen ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} + u_0 &= -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_m{}' \frac{y_0 - y_m}{r_{0m}^2}\left(1 - e^{-\frac{r_{0m}^2}{4\nu t}}\right) + \frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n \frac{y_0 - y'_n + h}{r_{0n}^2}\left(1 - e^{-\frac{r_{0n}^2}{4\nu t}}\right), \\ \frac{dy_0}{dt} &= \frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_m{}' \frac{x_0 - x_m - m\,l}{r_{0m}^2}\left(1 - e^{-\frac{r_{0m}^2}{4\nu t}}\right) - \frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n \frac{x_0 - x'_n - n\,l}{r_{0n}^2}\left(1 - e^{-\frac{r_{0n}^2}{4\nu t}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Der erste Term der beiden Gleichungen stellt den Einfluß der Wirbel der gleichen Straßenseite dar. Die Summation läuft über alle $m$, $m = 0$ ausgeschlossen. Der zweite Term beider Gleichungen liefert den Beitrag der Wirbel der unteren Straßenseite. Die Summation läuft über alle $n$. Die entgegengesetzten Vorzeichen der zweiten Terme gegenüber den ersten Termen rühren von der dem Betrage nach gleichen, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzten Zirkulation her.

b) Die Linearisierung des Differentialgleichungssystems. Wiederum sei angenommen, daß die Störungen $(x_m, y_m)$, $(x'_n, y'_n)$ klein gegen die Teilung $l$ seien. Die Linearisierung des Systems (15) führt zu den Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_m{}' \frac{1 - e^{-\frac{m^2 l^2}{4\nu t}}}{m^2 l^2}(y_0 - y_m) \\ &\quad + \frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n \left[\frac{n^2 l^2 - h^2}{(n^2 l^2 + h^2)^2}\left(1 - e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}\right) + \frac{2h^2}{n^2 l^2 + h^2}\,\frac{e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}}{4\nu t}\right](y_0 - y'_n) \\ &\quad + \frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n \left[\frac{2\,n\,l\,h}{(n^2 l^2 + h^2)^2}\left(1 - e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}\right) - \frac{2\,n\,l\,h}{n^2 l^2 + h^2}\,\frac{e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}}{4\nu t}\right](x_0 - x'_n), \\ \frac{dy_0}{dt} &= -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_m{}' \frac{1 - e^{-\frac{m^2 l^2}{4\nu t}} - 2\frac{m^2 l^2}{4\nu t}e^{-\frac{m^2 l^2}{4\nu t}}}{m^2 l^2}(x_0 - x_m) \\ &\quad + \frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n \left[\frac{n^2 l^2 - h^2}{(n^2 l^2 + h^2)^2}\left(1 - e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}\right) + \left(\frac{2h^2}{n^2 l^2 + h^2} - 2\right)\frac{e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}}{4\nu t}\right](x_0 - x'_n) \\ &\quad - \frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n \left[\frac{2\,n\,l\,h}{(n^2 l^2 + h^2)^2}\left(1 - e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}\right) - \frac{2\,n\,l\,h}{n^2 l^2 + h^2}\,\frac{e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}}{4\nu t}\right](y_0 - y'_n). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Für die gemeinsame Translationsgeschwindigkeit der Wirbel $u_0(t)$ erhält man

$$u_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi}\sum_n \frac{h}{n^2 l^2 + h^2}\left(1 - e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}\right). \tag{17}$$

Die Summe

$$\sum_n \frac{n\,l}{n^2 l^2 + h^2}\left(1 - e^{-\frac{n^2 l^2 + h^2}{4\nu t}}\right) \tag{18}$$

die bei der Linearisierung auftritt, konvergiert im Sinne von *Cauchy* und hat den Wert Null.

Wenn man in dem Gleichungssystem (16) den Summationsindex $n$ durch $n + 1/2$ ersetzt, besitzt man die Bewegungsgleichungen für den Fall der auf Lücke stehenden Wirbelstraße.

c) Vereinfachung der Differentialgleichungen für den Fall, daß nur der Aufwirbel gestört wird. Es soll zunächst ein einfacheres Problem gelöst werden. Die Störungen aller Wirbel bis auf den Aufwirbel mögen verschwinden. Dann gilt mit

$$\begin{aligned} (x_m, y_m) &= (0, 0), \qquad m \neq 0, \\ (x'_n, y'_n) &= (0, 0), \\ k &= \frac{h}{l}, \qquad \tau = \frac{4\nu}{l^2}t \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung, daß diejenigen Summen, die in $n$ ungerade sind, verschwinden, das vereinfachte System

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{y}_0\end{pmatrix} = -\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\begin{pmatrix}0 & F(\tau)\\ G(\tau) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \tag{19}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix}x_0(0)\\ y_0(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix} \qquad \text{für } \tau = 0\,.$$

$F(\tau)$, $G(\tau)$ sind folgendermaßen erklärt:

$$\left.\begin{aligned} F(\tau) &= \sum_m{}' \frac{1-e^{-\frac{m^2}{\tau}}}{m^2} - \sum_n{}' \frac{n^2-k^2}{(n^2+k^2)^2}\left(1-e^{-\frac{n^2+k^2}{\tau}}\right) - \sum_n \frac{2k^2}{n^2+k^2}\,\frac{e^{-\frac{n^2+k^2}{\tau}}}{\tau}\,,\\ G(\tau) &= F(\tau) + 2\left[\sum_n \frac{e^{-\frac{n^2+k^2}{\tau}}}{\tau} - \sum_m{}' \frac{e^{-\frac{m^2}{\tau}}}{\tau}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

**d) Integration der Bewegungsgleichungen und Stabilitätsdiskussion der beiden Konfigurationsmöglichkeiten der doppelreihigen Wirbelstraße.** Die Lösung der Gleichung (19) ist nach Abschnitt 3, c) (13) bekannt. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix} - \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau \begin{pmatrix}0 & F(\tau_1)\\ G(\tau_1) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix} d\tau_1 + \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2 \int_0^\tau\int_0^{\tau_1} \begin{pmatrix}F(\tau_1)\,G(\tau_2) & 0\\ 0 & G(\tau_1)\,F(\tau_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix} d\tau_1\,d\tau_2\\ &- \left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^3 \int_0^\tau\int_0^{\tau_3}\int_0^{\tau_2} \begin{pmatrix}0 & F(\tau_1)\,G(\tau_2)\,F(\tau_3)\\ G(\tau_1)\,F(\tau_2)\,G(\tau_3) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix} d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 + -\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Diskussion der Lösung ist für die beiden Konfigurationstypen der zweireihigen Wirbelstraßen gesondert durchzuführen. Zunächst soll die auf Lücke stehende Wirbelstraße betrachtet werden. Indem man in $F(\tau)$, $G(\tau)$ $n$ durch $n+1/2$ ersetzt, gelangt man zu $F^*(\tau)$, $G^*(\tau)$. Diese Funktionen lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\left.\begin{aligned} F^*(\tau) &= \sum_m{}' \frac{1-e^{-\frac{m^2}{\tau}}}{m^2} - \sum_n \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2}{\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2\right]^2}\left(1-e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2}{\tau}}\right)\\ &- \sum_n \frac{2k^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2}\,\frac{e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2}{\tau}}}{\tau}\,,\\ G^*(\tau) &= F^*(\tau) + 2\left[\sum_n \frac{e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+k^2}{\tau}}}{\tau} - \sum_m{}' \frac{e^{-\frac{m^2}{\tau}}}{\tau}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Die Konvergenz der Reihen, durch die $F^*(\tau)$, $G^*(\tau)$ dargestellt werden, ist gesichert. Die Reihenglieder der Reihen in $F^*(\tau)$ verschwinden wie $1/n^2$, die zusätzlichen Reihen in $G^*(\tau)$ konvergieren, da die Reihenglieder wie $e^{-\frac{n^2}{\tau}}$ gegen Null gehen. Die Reihen besitzen reelle Summen.

Die Funktionen $F^*(\tau)$, $G^*(\tau)$ hängen von dem Parameter $k = h/l$ ab. Um eine Übersicht über den Charakter der Lösungen (21) zu gewinnen, ist es zweckmäßig, nach den durch $F^*(\tau, k') = 0$ und $G^*(\tau, k'') = 0$ definierten Funktionen $k'(\tau)$ und $k''(\tau)$ zu fragen. Daß solche Funktionen existieren, ist zu erwarten, da für $\tau \to 0$ $G^*(\tau) \to F^*(\tau)$ geht und $F^*(0, k_1) = 0$ eine Lösung besitzt, nämlich die alte Stabilitätsbedingung nach *Th. v. Kármán*. Der Verlauf von $k' = k'(\tau)$ und $k'' = k''(\tau)$ ist in Abb. 5 dargestellt.

Die beiden Funktionen unterteilen die $(k, \tau)$-Ebene in drei Teile.

Oberhalb der Kurve $k' = k'(\tau)$ gilt $F^*(\tau, k) > 0$ und $G^*(\tau, k) > 0$,

unterhalb der Kurve $k'' = k''(\tau)$ gilt $F^*(\tau, k) < 0$ und $G^*(\tau, k) < 0$,

zwischen beiden Kurven ist $F^*(\tau, k) < 0$ und $G^*(\tau, k) > 0$.

Bei der Diskussion der Lösung (21) sind die drei geschilderten Möglichkeiten zu berücksichtigen. Angenommen $F^*(\tau, k) > 0$, $G^*(\tau, k) > 0$; für diesen Fall genügt es, eine Störung, die durch einen Punkt des zweiten bzw. vierten Quadranten eines $\xi_0, \eta_0$-Systems dargestellt ist, zu wählen, um zu zeigen, daß die Wirbelstraße für zugehörige $(k, \tau)$-Werte instabil ist. Der Nachweis kann hier fortgelassen werden, da alles wie im Abschnitt 3, d) verläuft.

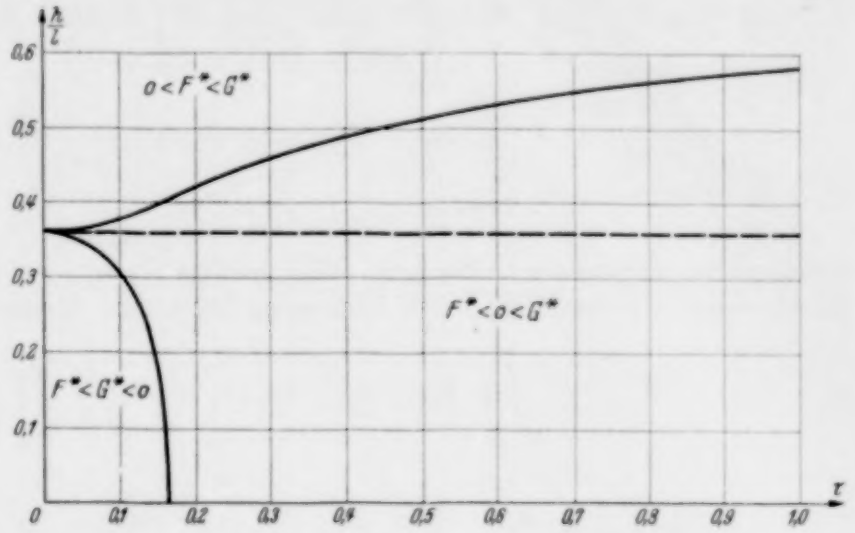


Abb. 5. Stabilitäts- und Instabilitätsbereich der Wirbelstraße mit „auf Lücke" stehenden Wirbeln.

Nimmt man $F^*(\tau, k) < 0$, $G^*(\tau, k) < 0$ an, befindet man sich also unterhalb der Kurve $k'' = k''(\tau)$, dann führen Anfangswerte der Störungen, die durch Punkte des ersten bzw. dritten Quadranten dargestellt werden, zu instabilen Lösungen. Es sei

$$x_0(0) = \xi_0 > 0\,,$$

$$y_0(0) = \eta_0 > 0;$$

dann gilt

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \xi_0 + \frac{I'_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau |F^*(\tau_1)|\,\eta_0\,d\tau_1 + \left(\frac{I'_0}{8\pi\nu}\right)^2 \int_0^\tau\int_0^{\tau_1} |F^*(\tau_1)|\,|G^*(\tau_2)|\,\xi_0\,d\tau_1\,d\tau_2 + \cdots, \\ y_0 &= \eta_0 + \frac{I'_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau |G^*(\tau_1)|\,\xi_0\,d\tau_1 + \left(\frac{I'_0}{8\pi\nu}\right)^2 \int_0^\tau\int_0^{\tau_1} |G^*(\tau_1)|\,|F^*(\tau_2)|\,\eta_0\,d\tau_1\,d\tau_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Da die Summen nur positive Glieder besitzen, ist die Behauptung bewiesen. Interessant sind die Grenzfälle $F^*(\tau, k') = 0$, $G^*(\tau, k') > 0$ und $F^*(\tau, k'') < 0$, $G^*(\tau, k'') = 0$. Auch sie stellen keine stabilen Anordnungen dar. Betrachtet man die allgemeine Lösung (21), so erkennt man, daß im ersten Fall die Störungskomponente $x_0$ konstant bleibt, jedoch die Störungskomponente $y_0$ dem Betrage nach immer größer wird. Im zweiten Fall ist es genau umgekehrt: Die Störungskomponente $y_0$ bleibt konstant, während die Komponente $x_0$ anwächst.

Die Kurven $k' = k'(\tau)$ und $k'' = k''(\tau)$ münden für kleine Zeiten mit gemeinsamer Tangente in die gestrichelt gezeichnete Stabilitätsbedingung der Wirbelstraße in der idealen Flüssigkeit ein. (Die zahlenmäßige Differenz von 0,363 gegen 0,281 ergibt sich aus der Vereinfachung, daß nur ein Wirbel gestört wurde.) Das setzt in Evidenz, daß für kleine Zeiten die *Kármán*sche Stabilitätsbedingung in der Tat die einzig mögliche Stabilitätsbedingung ist. An dieser Stelle wächst weder die $x_0$-Komponente noch die $y_0$-Komponente an.

Falls es unter den vorausgesetzten Bedingungen dieser Arbeit stabile Lösungen gibt, so sind sie nur noch im Gebiet $F^*(\tau, k) < 0$, $G^*(\tau, k) > 0$ möglich. Es sei $\lambda$ ein konstanter Faktor, dann führt die Bedingung

$$\lambda^2\,F^*\left(\tau, k_\lambda'''(\tau)\right) = -\,G^*\left(\tau, k_\lambda'''(\tau)\right) \quad (24)$$

zu stabilen Lösungen. Man setze

$$F^*(\tau) = -\,A(\tau)\,, \qquad G^*(\tau) = \lambda^2\,A(\tau); \quad (25)$$

dann schreiben sich die Komponenten der Lösung (21)

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \xi_0 + \eta_0 \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1 - \xi_0\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2\lambda^2\int_0^\tau\int_0^{\tau_1} A(\tau_1)\,A(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 \\ &\quad - \eta_0\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^3\lambda^2\int_0^\tau\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} A(\tau_1)\,A(\tau_2)\,A(\tau_3)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 + \xi_0\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^4\lambda \int_0^\tau\ldots\int_0^{\tau_3} A(\tau_1)\ldots A(\tau_4)\,d\tau_1\ldots d\tau_4 \\ &\quad + - - + + \cdots, \\ y_0 &= \eta_0 - \xi_0\lambda^2\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1 - \eta_0\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2\lambda^2\int_0^\tau\int_0^{\tau_1} A(\tau_1)\,A(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 \\ &\quad + \xi_0\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^3\lambda^4\int_0^\tau\cdot\int_0^{\tau_3} A(\tau_1)\cdot A(\tau_3)\,d\tau_1\cdot d\tau_3 + \eta_0\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^4\lambda^4\int_0^\tau\ldots\int_0^{\tau_4} A(\tau_1)\ldots A(\tau_4)\,d\tau_1\ldots d\tau_4 \\ &\quad - - + + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

als doppelt alternierende Reihen. Man zerlegt sie in zwei je einfach alternierende Reihen und kann alsdann summieren. Die Zerlegung ergibt die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \xi_0\left[1 - \lambda^2\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2\int_0^\tau\int_0^{\tau_1} A(\tau_1)\,A(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 + \lambda^4\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^4\int_0^\tau\ldots\int_0^{\tau_3} A(\tau_1)\ldots A(\tau_4)\,d\tau_1\ldots d\tau_4 - + - \cdots\right] \\ &\quad + \frac{1}{\lambda}\eta_0\left[\lambda\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1 - \lambda^3\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^3\int_0^\tau\cdot\int_0^{\tau_3} A(\tau_1)\cdot A(\tau_3)\,d\tau_1\cdot d\tau_3 + - + \cdots\right], \\ y_0 &= -\lambda\,\xi_0\left[\lambda\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1 - \lambda^3\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^3\int_0^\tau\cdot\int_0^{\tau_3} A(\tau_1)\cdot A(\tau_3)\,d\tau_1\cdot d\tau_3 + - + \cdots\right] \\ &\quad + \eta_0\left[1 - \lambda^2\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^2\int_0^\tau\int_0^{\tau_1} A(\tau_1)\,A(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 + \lambda^4\left(\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\right)^4\int_0^\tau\ldots\int_0^{\tau_3} A(\tau_1)\ldots A(\tau_4)\,d\tau_1\ldots d\tau_4 - + - \cdots\right] \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Die Reihen (27) lassen sich summieren, wenn man berücksichtigt, daß die Beziehung

$$\int_0^\tau\cdots\cdots\int_0^{\tau_{n-1}} A(\tau_1)\cdot\cdots\cdot A(\tau_n)\,d\tau_1\cdot\cdots\cdot d\tau_1\cdot\cdots\cdot d\tau_n = \frac{1}{n!}\left[\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1\right]^n \quad (28)$$

gilt. Die Reihen erkennt man als die Reihen des Sinus und Kosinus vom Argument

$$\lambda\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1,$$

und man schreibt (27) geschlossen in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left\{\lambda\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1\right\} & \frac{1}{\lambda}\sin\left\{\lambda\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1\right\} \\ -\lambda\sin\left\{\lambda\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1\right\} & \cos\left\{\lambda\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu}\int_0^\tau A(\tau_1)\,d\tau_1\right\} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Die Gesamtheit der durch (29) gegebenen stabilen Lösungen überdeckt den durch die Kurven $k' = k'(\tau)$ und $k'' = k''(\tau)$ abgetrennten Raum zwischen den Instabilitätsgebieten, wenn man $\lambda$ in $0 < \lambda < \infty$ variiert. Die Grenzfälle $\lambda \to 0$ und $\lambda \to \infty$ sind bereits als $F^*(\tau, k') = 0$ und $G^*(\tau, k'') = 0$ diskutiert worden. Studiert man die sich aus (29) ergebenden Bahnkurven, so findet man für alle erlaubten $\lambda$ Ellipsen.

Es gilt

$$\frac{x_0^2}{\xi_0^2 + \frac{1}{\lambda^2}\eta_0^2} + \frac{y_0^2}{\lambda^2 \xi_0^2 + \eta_0^2} = 1 . \tag{30}$$

Insbesondere ergibt sich für $\lambda = 1$ ein Kreis vom Radius $r = (\xi_0^2 + \eta_0^2)^{1/2}$. Die Stabilität der Wirbelstraße mit auf Lücke stehenden Wirbeln wird durch die geschilderte Gestalt der Bahnkurven anschaulich klar. Auch der Übergang zur Instabilität wird anschaulich, wenn man bedenkt, daß mit $\lambda \to 0$ und $\lambda \to \infty$, also bei Annäherung an die Kurven $k''(\tau)$ und $k'(\tau)$, jeweils die eine Achse der Ellipse immer größer und schließlich unendlich groß wird, während die andere Achse sich beliebig der gegebenen Anfangsstörung $\xi_0$ bzw. $\eta_0$ nähert.

Die Auswertung der Bedingung (24) ist für spezielle Werte von $\lambda^2$ in Abb. 6 dargestellt.

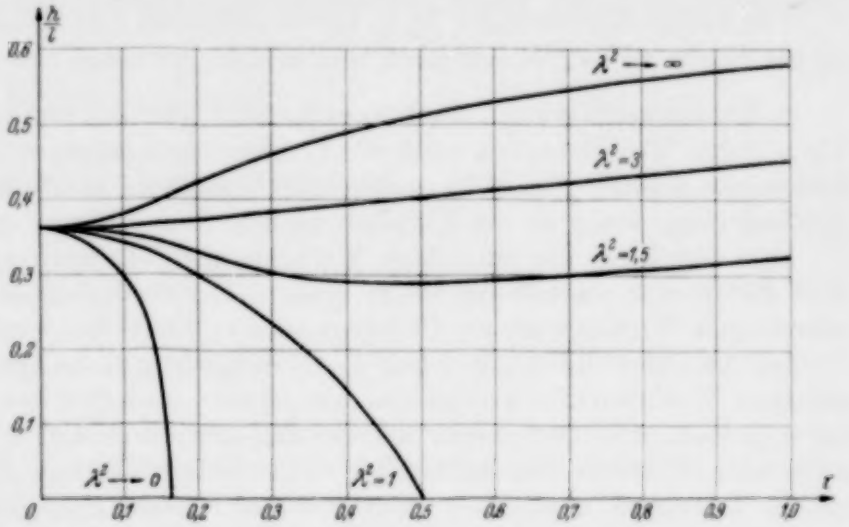


Abb. 6. Spezielle Lösungen der Wirbelstraße mit „auf Lücke" stehenden Wirbeln

Die Stabilitätsdiskussion der Wirbelstraße mit gegenüberliegenden Wirbeln ist nach den Ausführungen über die Wirbelstraße mit auf Lücke stehenden Wirbeln schnell zu erledigen.

Die Konvergenz der Funktionen $F(\tau)$, $G(\tau)$ (20) ist ebenso gesichert wie diejenige von $F^*(\tau)$ und $G^*(\tau)$. $F(\tau)$, $G(\tau)$ hängen ebenfalls vom Parameter $k = h/l$ ab. Es ist daher wiederum zweckmäßig, nach Lösungen von

$$F(\tau, k') = 0 \quad \text{und} \quad G(\tau, k'') = 0$$

zu suchen. Die numerische Untersuchung zeigt, daß $G(\tau, k)$ im untersuchten Bereich $0 \leq \tau \leq 1$ und $0{,}1 < k \leq 0{,}6$ stets größer als Null bleibt. $F(\tau, k') = 0$ definiert eine Lösungskurve, die in Abb. 7 dargestellt ist.

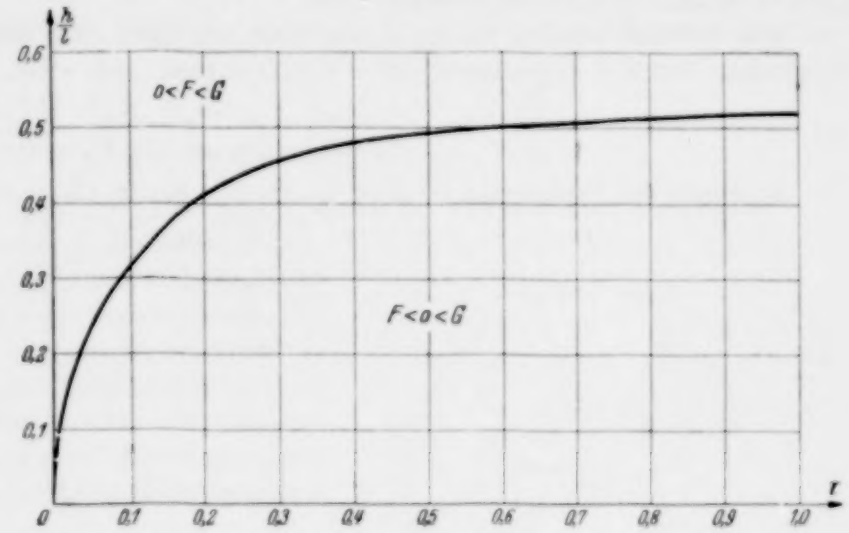


Abb. 7. Stabilitäts- und Instabilitätsbereich der Wirbelstraße mit gegenüberstehenden Wirbeln.

Sie ist für $k \to 0$, nicht erklärt. $k' = k'(\tau)$ teilt die $(k, \tau)$-Ebene in zwei Teile auf. Im oberen Teil ist

$$G(\tau, k) > 0 \quad \text{und} \quad F(\tau, k) > 0,$$

während unterhalb der Kurve

$$G(\tau, k) > 0 \quad \text{und} \quad F(\tau, k) < 0$$

ist. Nach den Ausführungen der vorausgegangenen Kapitel können im Raum $F(\tau, k) > 0$, $G(\tau, k) > 0$ keine Wirbelstraßen mit gegenüberstehenden Wirbeln existieren, weil beliebige Anfangsstörungen schließlich beständig anwachsen würden. Insbesondere sind solche Wirbelstraßen für kleine Zeiten, also bei ihrer Entstehung, instabil. Im Raume $G(\tau, k) > 0$, $F(\tau, k) > 0$ sind nach der hier dargestellten Theorie stabile Wirbelstraßen mit gegenüberstehenden Wirbeln möglich, allerdings werden solche Wirbelstraßen diesen Raum durch die vorgelegte Instabilitätsbarriere nicht ohne weiteres erreichen können.

**5. Bemerkungen zu der vorgelegten Theorie.** Eine quantitative Nachprüfung der vorgelegten Theorie stößt im Augenblick noch auf zwei Schwierigkeiten. Es liegen noch keine expliziten Ergebnisse für die Stabilitätsbedingung in dem Fall vor, daß die Störung aller Wirbel berücksichtigt ist. Diese Schwierigkeit dürfte jedoch bald behoben sein. Die entsprechenden Rechnungen sind in Arbeit und werden hoffentlich bald vorgelegt werden können.

Die zweite Schwierigkeit liegt darin, daß bei den bisherigen Versuchen wohl die Bedeutung des Kernradius angedeutet worden ist, daß aber noch keine ausführlichen Meßergebnisse über

dieses Problem vorliegen. Im engen Zusammenhang damit steht die tatsächliche Zirkulation des Einzelwirbels in der Wirbelstraße. Diesbezügliche Untersuchungen werden darüber Auskunft geben müssen, ob zur Berechnung des Kernradius die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit ausreicht, oder, wie wir es vermuten, turbulente Austauschgrößen Berücksichtigung werden finden müssen. Dennoch dürfte die Theorie auch in diesem Falle in der oben angegebenen Deutung der dimensionslosen Zeit Stabilitätsauskünfte geben können.

Die Theorie liefert nach unserer Ansicht aber bereits jetzt neue Einblicke in das Stabilitätsproblem der Wirbelstraßen. Zur Erklärung der bei den bisherigen Versuchen gefundenen Nichtreproduzierbarkeit der Meßergebnisse bei der Untersuchung der Wirbelstraßen mit auf Lücke stehenden Wirbeln wird durch die hier dargestellte Theorie die Möglichkeit aufgedeckt, daß Wirbelstraßen nicht für nur *einen* Wert von $h/l$ stabil sein können.

Für kleine Werte von $\tau$ bzw. für verschwindende Zähigkeit geht die dargestellte Theorie in die *Kármán*sche Theorie über, wie es auch verlangt werden muß.

**6. Zusammenfassung.** Nach dem Bericht über die bekannten Arbeiten über die Stabilitätstheorie der Wirbelstraßen wird die Vermutung ausgesprochen und begründet, daß der in den bisherigen Theorien nicht berücksichtigte endliche Wirbelkerndurchmesser und seine zeitliche Veränderung einen neuen Einblick in das Stabilitätsproblem der Wirbelstraßen verspricht.

Es werden für die einreihige Wirbelstraße Bewegungsgleichungen aufgestellt, linearisiert und durch eine unendliche Reihe gelöst. Die Stabilitätsdiskussion zeigt die Instabilität der einreihigen Wirbelstraße in Übereinstimmung mit der experimentellen Erfahrung.

Im Anschluß hieran werden die Bewegungsgleichungen für die beiden Typen der zweireihigen Wirbelstraße angegeben, linearisiert und für den Fall, daß nur ein Wirbel gestört wird, gelöst. Die Diskussion der Lösungen ergibt, daß für die Wirbelstraße mit auf Lücke stehenden Wirbeln für endliche Zeiten ein Stabilitätsgebiet existiert. Es werden spezielle stabile Lösungen angegeben. Für verschwindende Zähigkeit schrumpft das Stabilitätsgebiet auf eine Gerade zusammen, die die alte Stabilitätsbedingung nach *Th. v. Kármán* darstellt.

Die Diskussion der Wirbelstraße mit gegenüberstehenden Wirbeln zeigt das überraschende Ergebnis, daß neben der Instabilität dieser Anordnung für kleine Zeiten bzw. für große Werte des Parameters $k = h/l$ auch ein Stabilitätsbereich existiert, der jedoch nur durch Instabilitätsgebiete hindurch erreicht werden kann.

Zum Schluß werden einige Bemerkungen über die Gültigkeit der Theorie und über die Möglichkeiten der experimentellen Verifizierung gemacht.

(Eingegangen am 25. Januar 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *U. Domm*, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hermann-Föttinger-Institut.

# Die Hohlkugel bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz.

Von F. Jindra.

**1. Einleitung.** Im folgenden soll die Spannungsverteilung in einer homogenen, isotropen, dickwandigen Hohlkugel untersucht werden, die durch gleichmäßigen Außen- und Innendruck beansprucht wird. Zur Beschreibung des elastischen Verhaltens des Materials benützen wir ein allgemeines nichtlineares Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen.[1] In rechtwinkligen Koordinaten $x, y, z$ lauten die Spannungs-Dehnungsbeziehungen dieses nichtlinearen Elastizitätsgesetzes

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K} k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)\,(\sigma_x - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)\,(\sigma_y - \sigma_0)\,, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3K} k(s_0)\,\sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2)\,(\sigma_z - \sigma_0)\,, \\ \psi_{xy} &= \frac{1}{G} g(t_0^2)\,\tau_{xy}\,, \qquad \psi_{yz} = \frac{1}{G} g(t_0^2)\,\tau_{yz}\,, \qquad \psi_{zx} = \frac{1}{G} g(t_0^2)\,\tau_{zx}\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierin bedeuten $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \psi_{xy}, \psi_{yz}, \psi_{zx}$ die Verzerrungskomponenten, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ die Spannungskomponenten, $K$ den Kompressionsmodul und $G$ den Schubmodul; $s_0$ und $t_0$ die dimensionslosen Spannungsgrößen

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= \frac{\sigma_0}{3K}\,, \qquad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,, \qquad t_0 = \frac{\tau_0}{G}\,, \\ \tau_0^2 &= \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_y - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Kompressionsfunktion $k(s_0)$ und die Schubfunktion $g(t_0^2)$ werden als Potenzreihen der Spannungsgrößen (2) angesetzt:

$$\left.\begin{aligned} k(s_0) &= 1 + k_1 s_0 + k_2 s_0^2 + k_3 s_0^3 + \cdots\,, \\ g(t_0^2) &= 1 + g_2 t_0^2 + g_4 t_0^4 + g_6 t_0^6 + \cdots\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Der Verlauf der Funktionen (3) ist experimentell durch einfache Versuche zu ermitteln.

Wir leiten hier zuerst allgemein die Differentialgleichung der Radialspannung her. Unter Beschränkung auf bestimmte einfache Formen der Funktionen (3) geben wir Lösungen in geschlossener Form und durch sukzessive Näherung an. Aus den Zahlenergebnissen kann man schließen, daß der in der Praxis auftretende Abbau der Spannungsspitzen durch kleine Abweichungen des Elastizitätsgesetzes von der Linearität erklärt werden kann.

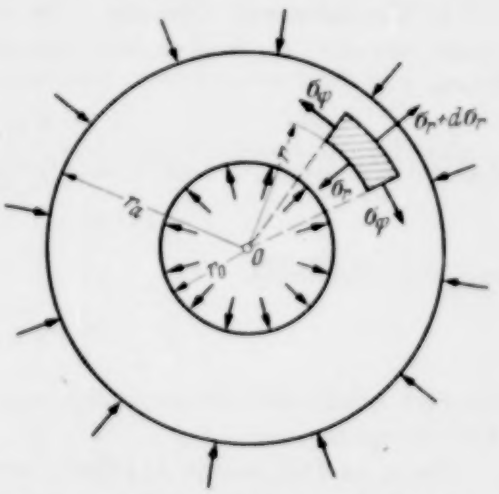


Abb. 1. Kugel unter gleichmäßigem Außen- und Innendruck.

**2. Die Differentialgleichung für die radiale Spannung.** Wenn eine Hohlkugel nur durch gleichmäßigen Außen- und Innendruck belastet wird, so muß der in ihr auftretende Spannungs- und Formänderungszustand symmetrisch um den Kugelmittelpunkt sein. Das Kräftegleichgewicht an irgendeinem Element der Kugel (Abb. 1) im Abstand $r$ vom Mittelpunkt liefert die Beziehung zwischen der Radialspannung $\sigma_r$ und der Tangentialspannung $\sigma_\varphi$

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + \frac{r}{2}\frac{d\sigma_r}{dr}\,. \tag{4}$$

[1] *H. Kauderer*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 450; *F. Jindra*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 121.

Mittels der radialen Verschiebung $u$ lassen sich die Dehnungen in radialer und tangentialer Richtung darstellen durch

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \tag{5}$$

Der Zusammenhang der Dehnungen mit den Spannungen folgt aus dem nichtlinearen Elastizitätsgesetz (1). Mit den Hauptspannungen $\sigma_r$, $\sigma_\varphi$, $\sigma_\varphi$ bildet man zunächst gemäß (2) den Mittelwert

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\,\sigma_\varphi).$$

Dann wird aus (1)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} &= \frac{1}{9K}k(s_0)\,(\sigma_r + 2\,\sigma_\varphi) + \frac{1}{3G}g(t_0^2)\,(\sigma_r - \sigma_\varphi), \\ \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} &= \frac{1}{9K}k(s_0)\,(\sigma_r + 2\,\sigma_\varphi) + \frac{1}{6G}g(t_0^2)\,(\sigma_\varphi - \sigma_r) \end{aligned}\right| \tag{6}$$

mit

$$s_0 = \frac{1}{9K}(\sigma_r + 2\,\sigma_\varphi), \qquad t_0^2 = \frac{2}{9G^2}(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2.$$

Indem man mit der zweiten dieser Gleichungen $du/dr$ bildet, diesen Ausdruck mit dem Wert der ersten Gleichung vergleicht und (4) einführt, findet man für die radiale Spannung die Differentialgleichung

$$\left[\frac{1}{9K}k(s_0) + \frac{1}{12G}g(t_0^2)\right]\left(r\,\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 4\,\frac{d\sigma_r}{dr}\right) + \frac{1}{9K}\frac{dk(s_0)}{dr}\left(r\,\frac{d\sigma_r}{dr} + 3\,\sigma_r\right) + \frac{1}{12G}\frac{dg(t_0^2)}{dr}\,r\,\frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \tag{7}$$

mit

$$s_0 = \frac{1}{9K}\left(r\,\frac{d\sigma_r}{dr} + 3\,\sigma_r\right), \qquad t_0^2 = \frac{1}{18\,G^2}r^2\left(\frac{d\sigma_r}{dr}\right)^2. \tag{7a}$$

Hierzu treten die Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_0} &= -\,p_0 \quad \text{für} \quad r = r_0, \\ (\sigma_r)_{r=r_a} &= -\,p_a \quad \text{für} \quad r = r_a, \end{aligned}\right| \tag{8}$$

wenn $r_0$ den inneren und $r_a$ den äußeren Halbmesser bezeichnet.

Die Lösung der Aufgabe hängt also von der Integration der Gleichung (7) bei vorgegebenen Randbedingungen ab. Wegen der außerordentlich komplizierten Form dieser nichtlinearen Differentialgleichung sollen hier nur zwei Sonderfälle beachtet werden.

**3. Geschlossene Lösung.** Da sich die Kompressionsfunktion bei vielen Stoffen[1] als konstant erweist, so wollen wir zuerst den Sonderfall behandeln, daß die Funktionen (3) in der Form

$$k(s_0) \equiv 1, \qquad g(t_0^2) = 1 + g_2\,t_0^2 \tag{9}$$

darstellbar sind. Dann vereinfacht sich die Differentialgleichung (7) der Radialspannung zu

$$(\varkappa^2 r^2 \sigma_r'^2 + 1)\,r\,\sigma_r'' + 2\,(\varkappa^2 r^2 \sigma_r'^2 + 2)\,\sigma_r' = 0 \tag{10}$$

mit der Stoffzahl

$$\varkappa^2 = \frac{g_2}{2G^2} : \frac{3K + 4G}{K} = \frac{g_2 K}{2G^2(3K + 4G)}, \tag{10a}$$

die hier allein die Abweichung vom *Hooke*schen Gesetz kennzeichnet. Striche bedeuten jeweils Ableitungen nach $r$.

Da $\sigma_r$ in (10) nicht explizite vorkommt, geht (10) für $p \equiv \sigma_r'$ in eine Differentialgleichung erster Ordnung über, die nach der Multiplikatorenmethode[2] lösbar ist. Der integrierende Faktor lautet

$$M = \frac{1}{r\,p\,(\varkappa^2 r^2 p^2 + 3)},$$

[1] Vgl. *H. Kauderer*, a. a. O. S. 468.

[2] Vgl. *E. Kamke*, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, 3. Aufl., Bd. I, S. 28, Leipzig 1944.

und somit läßt sich (10) in der Gestalt

$$\frac{\varkappa^2 r^2 p^2 + 1}{p\,(\varkappa^2 r^2 p^2 + 3)}\,p' + \frac{2\,(\varkappa^2 r^2 p^2 + 2)}{r\,(\varkappa^2 r^2 p^2 + 3)} = 0 \tag{11}$$

als eine exakte Differentialgleichung schreiben. Die Gleichung (11) besitzt eine Stammfunktion

$$F(r, p) = \frac{1}{3} \ln\left[r^4\, p\,(\varkappa^2 r^2 p^2 + 3)\right]. \tag{11a}$$

Die Lösung von (11) ist daher $F(r, p) = \text{konst}$. Führen wir wieder $\sigma_r'$ ein, so entsteht

$$\varkappa^2 r^6 \sigma_r'^3 + 3 r^4 \sigma_r' - 2B = 0, \tag{12}$$

wobei $2B$ die Integrationskonstante bezeichnet. Mit Hilfe der *Cardani*schen Formel[1] lösen wir (12) nach $\sigma_r'$ auf. Die einzige reelle Wurzel ist

$$\sigma_r' = \frac{1}{\varkappa r^2}\left(\sqrt[3]{\varkappa B + \sqrt{\varkappa^2 B^2 + r^6}} + \sqrt[3]{\varkappa B - \sqrt{\varkappa^2 B^2 + r^6}}\right).$$

Mit einer weiteren Integrationskonstanten $A$ ergibt sich dann

$$\sigma_r = A + \int \left(\sqrt[3]{\varkappa B + \sqrt{\varkappa^2 B^2 + r^6}} + \sqrt[3]{\varkappa B - \sqrt{\varkappa^2 B^2 + r^6}}\right)\frac{dr}{\varkappa r^2}. \tag{13}$$

Zwecks Auswertung von (13) führen wir die Substitution ein:

$$w = \frac{1}{\varkappa r}\left(\sqrt[3]{\varkappa B + \sqrt{\varkappa^2 B^2 + r^6}} + \sqrt[3]{\varkappa B - \sqrt{\varkappa^2 B^2 + r^6}}\right) \tag{14}$$

oder

$$\varkappa^2 r^3 w^3 + 3 r^3 w - 2B = 0. \tag{14a}$$

Damit wird (13) in das leicht lösbare Integral

$$\sigma_r = A - \int \frac{\varkappa^2 w^2 + 1}{\varkappa^2 w^2 + 3}\,dw$$

verwandelt.

So erhält man endlich die Radialspannung

$$\sigma_r = A - w + \frac{2}{\varkappa\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa w}{\sqrt{3}}. \tag{15}$$

Durch Grenzübergang $\varkappa \to 0$ geht (15) in die bekannte Lösung $\sigma_r^*$ für die lineare Theorie über[2]

$$\sigma_r^* = A^* + \frac{B^*}{r^3}. \tag{16}$$

Zum Beweis muß man das letzte Glied in (15) in eine Potenzreihe entwickeln und den Ausdruck (14a) beachten.

Zur Bestimmung der Konstanten $A$ und $B$ haben wir die vorgeschriebenen Randbedingungen. Mit Hilfe von (15) erhalten wir aus (8) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} A - w_0 + \frac{2}{\varkappa\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa w_0}{\sqrt{3}} &= -p_0, \\ A - w_a + \frac{2}{\varkappa\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa w_a}{\sqrt{3}} &= -p_a, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

wenn wir

$$\begin{aligned} \varkappa w_a &= \sqrt[3]{\frac{\varkappa B}{r_a^3} + \sqrt{\frac{\varkappa^2 B^2}{r_a^6} + 1}} + \sqrt[3]{\frac{\varkappa B}{r_a^3} - \sqrt{\frac{\varkappa^2 B^2}{r_a^6} + 1}} \\ &= \sqrt[3]{C + \sqrt{1 + C^2}} + \sqrt[3]{C - \sqrt{1 + C^2}} \end{aligned}$$

und

$$\varkappa w_0 = \sqrt[3]{C R^3 + \sqrt{1 + C^2 R^6}} + \sqrt[3]{C R^3 - \sqrt{1 + C^2 R^6}}$$

[1] Vgl. z. B. Hütte, 27. Aufl., Bd. I, S. 77, Berlin 1942.
[2] Vgl. z. B. S. *Timoshenko*, Theory of Elasticity, S. 325, New York 1934.

mit den Abkürzungen

$$C = \frac{\varkappa B}{r_a^3}, \qquad R = \frac{r_a}{r_0} \tag{18}$$

setzen. Aus (17) gewinnen wir dann durch Substraktion die Bestimmungsgleichung für die Integrationskonstante $C$ bzw. $B$

$$\varkappa (p_0 - p_a) = \varkappa (w_0 - w_a) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa (w_0 - w_a)\sqrt{3}}{3 + \varkappa^2 w_0 w_a}. \tag{19}$$

Sobald die Lösung dieser in $C$ transzendenten Gleichung bekannt ist, kann die Integrationskonstante $A$ aus (17) leicht ermittelt werden.

Die Tangentialspannung $\sigma_\varphi$ berechnet sich gemäß (4) mit (15) zu

$$\sigma_\varphi = A - \frac{1}{2} w + \frac{2}{\varkappa \sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa w}{\sqrt{3}} \tag{20}$$

und hat insbesondere am Innen- und Außenrand die Werte

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_0} = - p_0 + \frac{1}{2} w_0, \qquad (\sigma_\varphi)_{r=r_a} = - p_a + \frac{1}{2} w_a. \tag{21}$$

Die tangentiale Spannung besitzt einen Extremwert

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_m} = A + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)$$

an der Stelle

$$r_m = \frac{\varkappa B}{2},$$

welche natürlich nicht notwendig in den Bereich $r_0$ bis $r_a$ fallen muß.

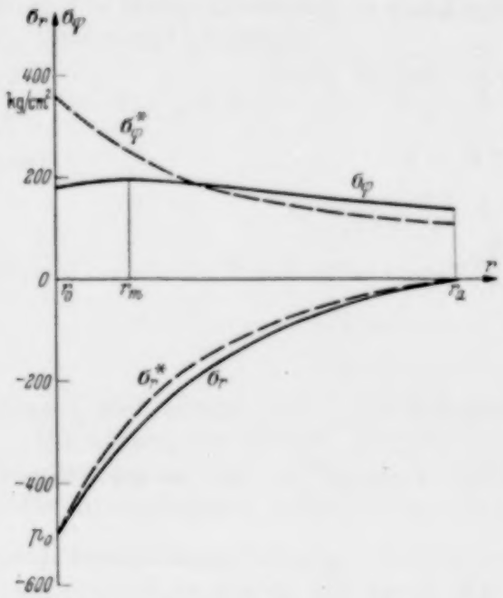

Abb. 2. Verlauf der Radial- und Tangentialspannung.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch die Tangentialspannung $\sigma_\varphi^*$ für die lineare Theorie ($\varkappa = 0$) hinzugefügt

$$\sigma_\varphi^* = A^* - \frac{B^*}{2 r^3}. \tag{22}$$

Wir behandeln jetzt zwei Anwendungsfälle:

a) Es sei $p_a = p_0$. In diesem Fall muß von vornherein die Konstante $B$ gleich Null gesetzt werden, wie man sich aus (19) überzeugen kann. Man erhält dann an jeder Stelle auch für das nichtlineare Elastizitätsgesetz

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = - p_0.$$

b) Es sei $p_a = 0$, aber $p_0 \neq 0$. Dann folgt die Integrationskonstante $C$ gemäß (19) aus

$$\varkappa (w_0 - w_a) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa (w_0 - w_a)\sqrt{3}}{3 + \varkappa^2 w_0 w_a} = p_0.$$

Für die Spannungen ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= - (w - w_a) + \frac{2}{\varkappa \sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa (w - w_a)\sqrt{3}}{3 + \varkappa^2 w_a w}, \\ \sigma_\varphi &= - \frac{1}{2} (w - 2 w_a) + \frac{2}{\varkappa \sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varkappa (w - w_a)\sqrt{3}}{3 + \varkappa^2 w_a w}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

und somit für die Randwerte

$$(\sigma_\varphi)_{r=r_0} = - p_0 + \frac{1}{2} w_0, \qquad (\sigma_\varphi)_{r=r_a} = \frac{1}{2} w_a. \tag{23a}$$

In Abb. 2 ist der Verlauf der Spannungskomponenten $\sigma_r$ und $\sigma_\varphi$ längs eines Halbmessers für $p_0 = 500$ kg/cm², $\varkappa = 10^{-3}$ cm²/kg und $R = 2$ dargestellt. Man erkennt den starken Abbau der Spannungspitze $(\sigma_\varphi)_{r=r_a}$ infolge der Nichtlinearität.

Um einen Überblick über die Abweichungen der Lösungen (23) gegenüber den Werten der linearen Theorie (22) zu erhalten, wurden die Randwerte (23a) der Tangentialspannung für verschiedene Werte der Stoffzahl $\alpha$ und $R = 1{,}25$ berechnet. In Abb. 3 und 4 sind die Änderungen

$$\frac{\Delta\sigma_\varphi}{\sigma_\varphi^*} = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_\varphi^*}{\sigma_\varphi^*}$$

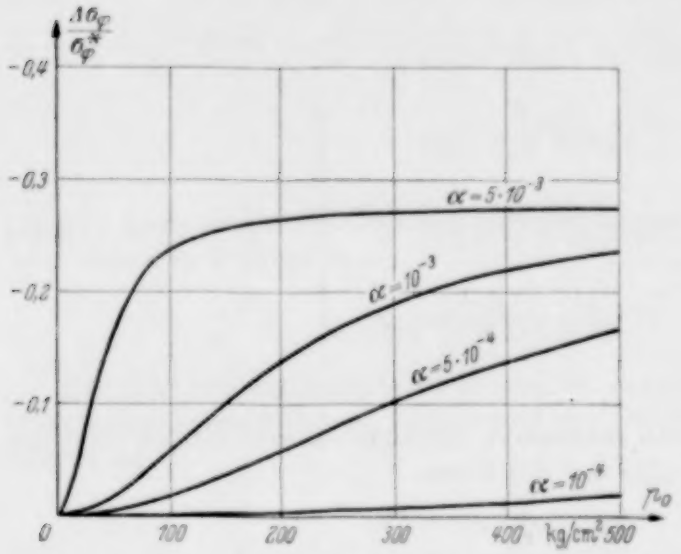


Abb. 3. Änderung der Tangentialspannung am Innenrand (für $R = 1{,}25$).

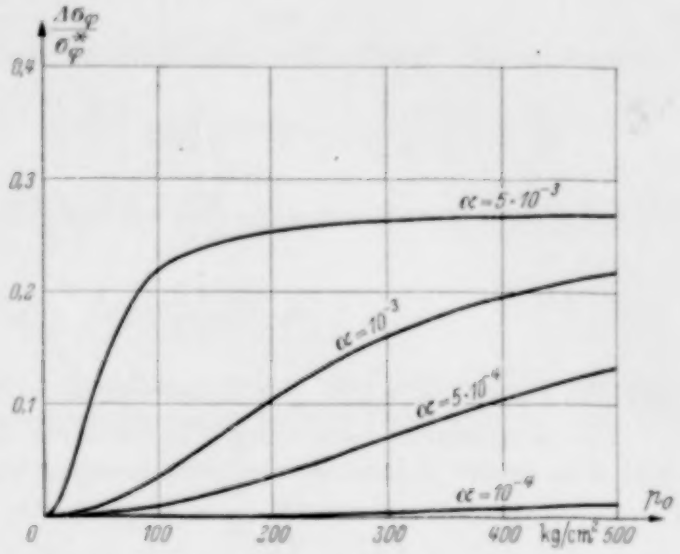


Abb. 4. Änderung der Tangentialspannung am Außenrand (für $R = 1{,}25$).

am Innen- und Außenrand über dem Innendruck $p_0$ aufgetragen. Wie zu erwarten, sind die Änderungen der Tangentialspannung am Innenrand negativ und am Außenrand positiv. Die bezogenen Änderungen werden um so größer sein, je größer die Stoffzahl $\alpha$ ist, die die Abweichung des Elastizitätsgesetzes von der Linearität angibt. Außerdem wurden die Änderungen $\Delta\sigma_\varphi/\sigma_\varphi^*$ am Innen- und Außenrand für $\alpha = 10^{-3}$ cm²/kg und verschiedene Annahmen von $R$ ermittelt. Die Ergebnisse sind in Abb. 5 und 6 dargestellt. Wie man aus Abb. 5 ersieht, wird die Abnahme der Tangentialspannung an der Stelle $r = r_0$ für große Werte von $p_0$ um so größer sein, je größer das Verhältnis der Halbmesser ist, d. h. je größer die auftretende Spannungsspitze am Innenrand ist.

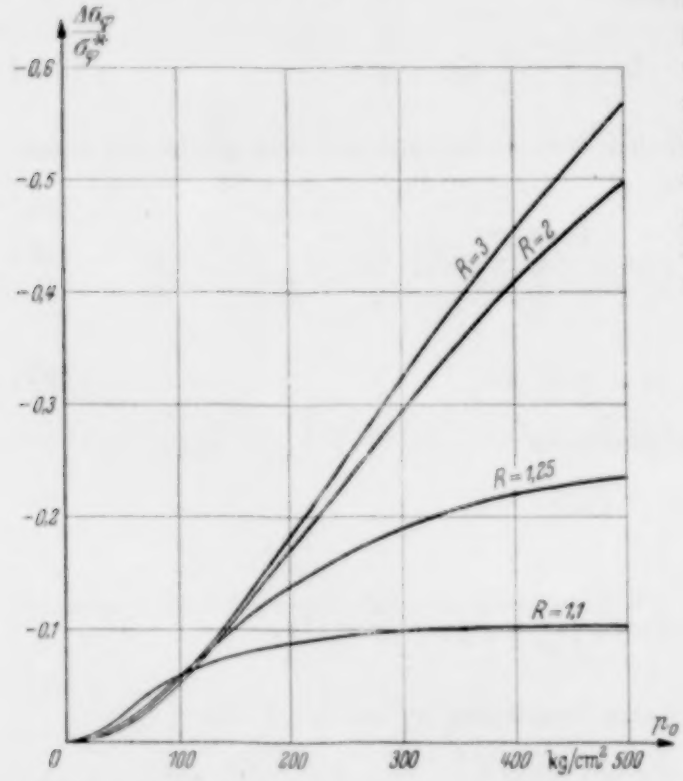


Abb. 5. Änderung der Tangentialspannung am Innenrand (für $\alpha = 10^{-3}$ cm²/kg).

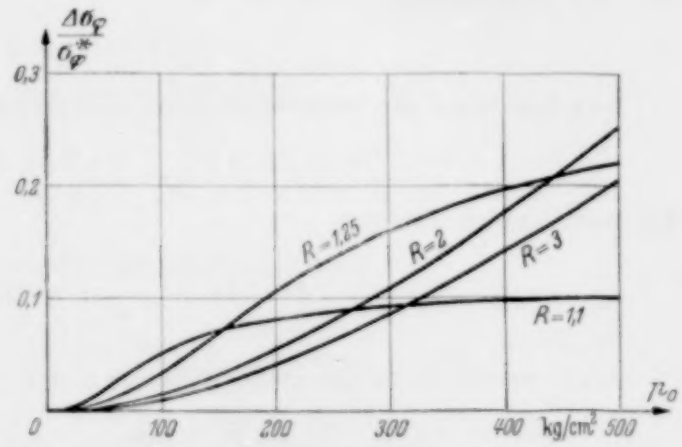


Abb. 6. Änderung der Tangentialspannung am Außenrand (für $\alpha = 10^{-3}$ cm²/kg).

**4. Lösung durch sukzessive Näherung.** Jetzt wollen wir uns dem praktisch wichtigen Sonderfall zuwenden, daß die Reihenentwicklungen (3) wenigstens nach den quadratischen Gliedern abgebrochen werden können, also die Kompressions- und Schubfunktion in der

Form

$$k(s_0) = 1 + k_1 s_0 + k_2 s_0^2 , \qquad g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2 \tag{24}$$

darstellbar sind. Aus (7) wird dann

$$[\alpha^2 r^2 \sigma_r'^2 + \beta_2 (r\sigma_r' + 3\sigma_r)^2 + \beta_1 (r\sigma_r' + 3\sigma_r) + 1]\, r\sigma_r'' + 2\,[\alpha^2 r^2 \sigma_r'^2 + 2\beta_2 (r\sigma_r' + 3\sigma_r)^2 + 2\beta_1 (r\sigma_r' + 3\sigma_r) + 2]\,\sigma_r' = 0 , \tag{25}$$

wenn folgende Stoffzahlen eingeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{g_2}{2G^2} : \frac{3K + 4G}{K} = \frac{g_2 K}{2G^2 (3K + 4G)} , \\ \beta_1 &= \frac{2k_1}{9K} : \frac{3K + 4G}{4G} = \frac{8 k_1 G}{9K(3K + 4G)} , \\ \beta_2 &= \frac{3k_2}{(9K)^2} : \frac{3K + 4G}{4G} = \frac{12 k_2 G}{(9K)^2 (3K + 4G)} . \end{aligned}\right| \tag{25a}$$

Striche bedeuten wiederum Ableitungen nach $r$.

Die nichtlineare Gleichung (25) lösen wir durch sukzessive Approximation. Durch Division mit dem ersten Klammerausdruck bringen wir (25) auf die Form

$$r\sigma_r'' + 4\sigma_r' = \frac{2\alpha^2 r^2 \sigma_r'^3}{\alpha^2 r^2 \sigma_r'^2 + \beta_2 (r\sigma_r' + 3\sigma_r)^2 + \beta_1 (r\sigma_r' + 3\sigma_r) + 1} . \tag{26}$$

Wir integrieren zuerst die homogene Gleichung, indem wir die rechte Seite von (26) gleich Null setzen. So erhalten wir die nullte Näherung, die bekannte Lösung der linearen Theorie

$$\sigma_r^{(0)} = A + \frac{B}{r^3} , \qquad \sigma_\varphi^{(0)} = A - \frac{B}{2r^3} . \tag{27}$$

Die Randbedingungen (8) liefern dann bekanntlich

$$A = -\frac{p_a r_a^3 - p_0 r_0^3}{r_a^3 - r_0^3} , \qquad B = \frac{r_a^3 r_0^3}{r_a^3 - r_0^3} (p_a - p_0) . \tag{27a}$$

Den Lösungswert (27) führen wir jetzt in die rechte Seite von (26) ein und gewinnen somit für die erste Näherung die Gleichung

$$r\sigma_r^{(1)\prime\prime} + 4\sigma_r^{(1)\prime} = -\frac{54\alpha^2 B^3}{(A'^2 r^6 + 9\alpha^2 B^2) r^4} \tag{28}$$

mit der Abkürzung

$$A'^2 = 1 + 3\beta_1 A + 9\beta_2 A^2 . \tag{28a}$$

Nun hat aber die nichthomogene Differentialgleichung

$$x y'' + 4 y' = f(x)$$

die partikuläre Lösung

$$y = \frac{1}{3}\int f(x)\,dx - \frac{1}{3x^3}\int x^3 f(x)\,dx = \frac{1}{3x^3}\int\int f(x)\,dx\,d(x^3) .$$

Somit erhält man die erste Näherung der radialen Spannung $\sigma_r^{(1)}$ in der Form

$$\sigma_r^{(1)} = C + \frac{D}{r^3} - \frac{B}{3r^3}\ln\left(A'^2 + \frac{9\alpha^2 B^2}{r^6}\right) + \frac{2A'}{9\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{A' r^3}{9\alpha B} , \tag{29}$$

und gemäß (4) die zugehörige tangentiale Spannung

$$\sigma_\varphi^{(1)} = C - \frac{D}{2r^3} + \frac{B}{r^3}\left[1 + \frac{1}{6}\ln\left(A'^2 + \frac{9\alpha^2 B^2}{r^6}\right)\right] + \frac{2A'}{9\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{A' r^3}{9\alpha B} . \tag{30}$$

$C$ und $D$ sind Integrationskonstanten, deren Bestimmung aus den Randbedingungen (8) zu erfolgen hat. Unter Beachtung von (27a) findet man

$$C = \frac{1}{r_a^3 - r_0^3}\left[A(r_a^3 - r_0^3) - \frac{B}{3}\ln\frac{A'^2 + \frac{9\,\varkappa^2 B^2}{r_0^6}}{A'^2 + \frac{9\,\varkappa^2 B^2}{r_a^6}} - \frac{2\,A'}{9\,\varkappa}\left(r_a^3 \operatorname{arc\,tg}\frac{A'\,r_a^3}{3\,\varkappa\,B} - r_0^3 \operatorname{arc\,tg}\frac{A'\,r_0^3}{3\,\varkappa\,B}\right)\right],$$

$$D = \frac{1}{r_a^3 - r_0^3}\Big\{B\,(r_a^3 - r_0^3) + \frac{B}{3}\left[r_a^3\ln\left(A'^2 + \frac{9\,\varkappa^2\,B^2}{r_0^6}\right) - r_0^3\ln\left(A'^2 + \frac{9\,\varkappa^2\,B^2}{r_a^6}\right)\right]$$
$$+ \frac{2\,A'}{9\,\varkappa}\,r_a^3\,r_0^3 \operatorname{arc\,tg}\frac{3\,\varkappa\,A'\,B\,(r_a^3 - r_0^3)}{A'^2\,r_a^3\,r_0^3 + 9\,\varkappa^2\,B^2}\Big\}.$$

Die Änderungen der Spannungskomponenten infolge der nichtlinearen Zusatzglieder in (25) berechnen sich dann zu

$$\Delta\sigma_r = \sigma_r^{(1)} - \sigma_r^{(0)}, \qquad \Delta\sigma_\varphi = \sigma_\varphi^{(1)} - \sigma_\varphi^{(0)}. \tag{31}$$

Als Anwendungsbeispiel soll wieder der Fall behandelt werden, daß die Hohlkugel nur durch den Innendruck $p_0$ belastet wird. Die Näherungslösungen nullter Ordnung nehmen die Werte an

$$\sigma_r^{(0)} = A_0\left(1 - \frac{r_a^3}{r^3}\right), \qquad \sigma_\varphi^{(0)} = A_0\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{r_a^3}{r^3}\right)$$

mit

$$A_0 = \frac{p_0}{R^3 - 1},$$

wobei wieder zur Abkürzung $R = r_a/r_0$ gesetzt ist. Die Änderungen der Spannungskomponenten werden dann nach (29) bis (31)

$$\Delta\sigma_r = C_0' + \frac{D_0'}{r^3} + \frac{A_0}{3}\,\frac{r_a^3}{r^3}\ln\left(A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2\,\frac{r_a^6}{r^6}\right) - \frac{2\,A'}{9\,\varkappa}\operatorname{arc\,tg}\frac{A'\,r^3}{3\,\varkappa\,A_0\,r_a^3},$$

$$\Delta\sigma_\varphi = C_0' - \frac{D_0'}{2\,r^3} - \frac{A_0\,r_a^3}{r^3}\left[1 + \frac{1}{6}\ln\left(A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2\,\frac{r_a^6}{r^6}\right)\right] - \frac{2\,A'}{9\,\varkappa}\operatorname{arc\,tg}\frac{A'\,r^3}{3\,\varkappa\,A_0\,r_a^3}$$

mit

$$C_0' = \frac{A_0}{3\,(R^3 - 1)}\left[R^3\ln\frac{A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2\,R^6}{A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2} + \frac{2\,A'}{3\,\varkappa\,A_0}\left(R^3 \operatorname{arc\,tg}\frac{A'}{3\,\varkappa\,A_0} - \operatorname{arc\,tg}\frac{A'}{\varkappa\,3\,A_0\,R^3}\right)\right]$$

und

$$D_0' = -\frac{A_0\,r_a^3}{3\,(R^3 - 1)}\left[R^3\ln\,(A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2\,R^6) - \ln\,(A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2)\right.$$
$$\left. + \frac{2\,A'}{3\,\varkappa\,A_0}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\,\varkappa\,A'\,A_0\,(R^3 - 1)}{A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2\,R^3}\right],$$

woraus die Randwerte für die Änderung der Tangentialspannung folgen:

$$(\Delta\sigma_\varphi)_{r=r_0} = \frac{A_0\,R^3}{2\,(R^3 - 1)}\ln\frac{A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2\,R^6}{A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2} + \frac{A'\,R^3}{3\,\varkappa\,(R^3 - 1)}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\,\varkappa\,A'\,A_0\,(R^3 - 1)}{A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2\,R^3} - A_0\,R^3,$$

$$(\Delta\sigma_\varphi)_{r=r_a} = \frac{A_0\,R^3}{2\,(R^3 - 1)}\ln\frac{A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2\,R^6}{A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2} + \frac{A'}{3\,\varkappa\,(R^3 - 1)}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\,\varkappa\,A'\,A_0\,(R^3 - 1)}{A'^2 + 9\,\varkappa^2\,A_0^2\,R^3} - A_0.$$

Setzt man in diesen Audsrücken $A' \equiv 1$ (d. h. $\beta_1 = \beta_2 = 0$), so erhält man eine Näherungslösung für den Sonderfall (9). Wie die Durchrechnung einiger Zahlenbeispiele zeigte, ergeben die hiermit erhaltenen Werte eine gute Übereinstimmung mit den exakten Lösungen von Ziff. 3.

**5. Zusammenfassung.** Mit einem allgemeinen nichtlinearen Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen werden die Spannungen in einer dickwandigen Hohlkugel berechnet. In allen Zahlenbeispielen zeigt es sich, daß die infolge der Nichtlinearität des Elastizitätsgesetzes errechnete Spannungsverteilung erhebliche Abweichungen gegenüber den Werten der linearen Theorie ergibt, und zwar insbesondere für die Randwerte. Die Ergebnisse legen somit die Richtigkeit der Vermutung nahe, wonach bereits kleine, bei den meisten Werkstoffen vorkommende Abweichungen vom *Hooke*schen Gesetz einen starken Abbau der Spannungsspitzen zur Folge haben.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Dr. *R. Grammel* sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft meinen aufrichtigsten Dank für die Unterstützung bei der Durchführung dieser Arbeit aussprechen.

(Eingegangen am 5. Februar 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *F. Jindra*, Stuttgart-O, Gerolstr. 70.